BAB III

METODA EKSAK

3.1 METODA GAUSS

Pada pasal ini dibahas penyelesaian sistim persamaan linier dengan metoda Gauss yang merupakan suatu proses eliminasi berurutan. Sebagai contoh ditinjau sebuah sistim enam persamaan dengan enam bilangan tak diketahui yang determinan matriks koefisiennya tidak sama dengan nol.

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 + a_{16}x_6 &= a_{17} \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 + a_{26}x_6 &= a_{27} \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 + a_{36}x_6 &= a_{37} \\
a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + a_{45}x_5 + a_{46}x_6 &= a_{46} \\
a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 + a_{56}x_6 &= a_{57} \\
a_{61}x_1 + a_{62}x_2 + a_{63}x_3 + a_{64}x_4 + a_{65}x_5 + a_{66}x_6 &= a_{67}
\end{aligned} \quad \ldots (1)$$

Koefisien a_{11} disebut elemen awal dari sistim tersebut. Proses eliminasi dilakukan sebagai berikut :

1. Koefisien-koefisien persamaan pertama sistim (1) dibagi dengan elemen awal a_{11} maka didapat.

$$x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}x_4 + b_{15}x_5 + b_{16}x_6 = b_{17} \quad \ldots (2)$$

Koefisien-koefisien persamaan (2) secara umum ditulis

$$b_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{11}} \qquad 1 < j \leq n+1 \qquad \ldots (3)$$

2. x_1 dieliminasi dari lima persamaan terakhir sistim (1) dengan cara mengalikan persamaan (2) berturut-turut dengan a_{21}, a_{31}, a_{41}, a_{51}, a_{61} kemudian hasil yang didapat dikurangkan pada persamaan yang bersangkutan. Maka didapat suatu sistim baru yang terdiri dari lima persamaan dengan

lima bilangan tak diketahui.

$$
\begin{aligned}
a_{22.1}x_2 + a_{23.1}x_3 + a_{24.1}x_4 + a_{25.1}x_5 + a_{26.1}x_6 &= a_{27.1}\\
a_{32.1}x_2 + a_{33.1}x_3 + a_{34.1}x_4 + a_{35.1}x_5 + a_{36.1}x_6 &= a_{37.1}\\
a_{42.1}x_2 + a_{43.1}x_3 + a_{44.1}x_4 + a_{45.1}x_5 + a_{46.1}x_6 &= a_{47.1} \qquad (4)\\
a_{52.1}x_2 + a_{53.1}x_3 + a_{54.1}x_4 + a_{55.1}x_5 + a_{56.1}x_6 &= a_{57.1}\\
a_{62.1}x_2 + a_{63.1}x_3 + a_{64.1}x_4 + a_{65.1}x_5 + a_{66.1}x_6 &= a_{67.1}
\end{aligned}
$$

Koefisien-koefisien persamaan (4) adalah

$$a_{ij.1} = a_{ij} - a_{i1}b_{1j} \quad ; \quad i,j \geqslant 2 \qquad \ldots \quad (5)$$

3. Koefisien-koefisien persamaan pertama sistim (4) dibagi dengan elemen awal $a_{22.1}$ maka didapat.

$$x_2 + b_{23.1}x_3 + b_{24.1}x_4 + b_{25.1}x_5 + b_{26.1}x_6 = b_{27.1} \qquad (6)$$

dimana.

$$b_{2j.1} = \frac{a_{2j.1}}{a_{22.1}} \quad ; \quad 2 < j \leqslant n+1 \qquad \ldots \quad (7)$$

4. x_2 dieliminasi dari empat persamaan terakhir sistim (4) dengan cara analog seperti pada waktu mengeliminasi x_1 dan didapat,

$$
\begin{aligned}
a_{33.2}x_3 + a_{34.2}x_4 + a_{35.2}x_5 + a_{36.2}x_6 &= a_{37.2}\\
a_{43.2}x_3 + a_{44.2}x_4 + a_{45.2}x_5 + a_{46.2}x_6 &= a_{47.2} \qquad \ldots \quad (8)\\
a_{53.2}x_3 + a_{54.2}x_4 + a_{55.2}x_5 + a_{56.2}x_6 &= a_{57.2}\\
a_{63.2}x_3 + a_{64.2}x_4 + a_{65.2}x_5 + a_{66.2}x_6 &= a_{67.2}
\end{aligned}
$$

Koefisien-koefisien persamaan (8) adalah.

$$a_{ij.2} = a_{ij.1} - a_{i2.1}b_{2j.1} \quad ; \; i,j \geqslant 3 \qquad \ldots \quad (9)$$

5. Dengan melanjutkan proses secara analog akhirnya didapat sistim dua persamaan dengan dua bilangan tak diketahui yang koefisien-koefisiennya dapat ditulis,

$$a_{ij.4} = a_{ij.3} - a_{i4.3}b_{4j.3} \quad ; \; i,j \geqslant 5 \qquad \ldots (10)$$

$$a_{55.4}x_5 + a_{56.4}x_6 = a_{57.4}$$
$$a_{65.4}x_5 + a_{66.4}x_6 = a_{67.4} \qquad \ldots (11)$$

6. Bila koefisien persamaan pertama sistim (11) dibagi dengan elemen awal $a_{55.4}$ dan bila,

$$b_{5j.4} = \frac{a_{5j.4}}{a_{55.4}} \quad ; \quad 5 < j \leq n+1 \qquad \ldots (12)$$

Maka didapat persamaan,

$$x_5 + b_{56.4}x_6 = b_{57.4} \qquad \ldots (13)$$

7. Akhirnya langkah terakhir sampai pada sebuah persamaan dengan satu bilangan tak diketahui dengan koefisien,

$$a_{ij.5} = a_{ij.4} - a_{i5.4}b_{5j.4} \quad ; \; i,j \geq 6 \qquad \ldots (14)$$

yaitu $a_{66.5}x_6 = a_{67.5}$ ... (15)

Dengan membagi persamaan (15) dengan $a_{66.5}$ didapat

$$x_6 = b_{67.5} \qquad \ldots (16)$$

Bila semua koefisien-koefisien $b_{ij.i-1}$; $j > i$ dikumpulkan akan didapat sebuah matriks segitiga yang memberikan penyelesaian sistim persamaan (1). Dapat dicatat bahwa proses yang diuraikan diatas hanya dapat dilakukan pada keadaan tidak ada elemen awal persamaan bernilai nol.

Proses untuk menemukan koefisien-koefisien sistim segitiga disebut " Langkah Maju ", sedangkan proses mendapatkan jawabannya disebut " Langkah Balik ".

Secara skematis proses diatas dapat dilakukan dengan suatu skema yang disebut skema pembagian tunggal.

Penyelesaian sistim :

$$1.00x_1 + 0.39x_2 + 0.48x_3 + 0.57x_4 + 0.66x_5 + 0.75x_6 = 0.20$$
$$0.39x_1 + 1.00x_2 + 0.33x_3 + 0.42x_4 + 0.51x_5 + 0.60x_6 = 0.30$$
$$0.48x_1 + 0.33x_2 + 1.00x_3 + 0.27x_4 + 0.36x_5 + 0.45x_6 = 0.40$$
$$0.57x_1 + 0.42x_2 + 0.27x_3 + 1.00x_4 + 0.21x_5 + 0.30x_6 = 0.50$$

$$0.66x_1 + 0.51x_2 + 0.36x_3 + 0.21x_4 + 1.00x_5 + 0.15x_6 = 0.60$$
$$0.75x_1 + 0.60x_2 + 0.45x_3 + 0.30x_4 + 0.15x_5 + 1.00x_6 = 0.70$$

Dapat dilihat pada tabel I

Selanjutnya akan dibahas mengenai cara kontrol karena hal tersebut perlu digunakan dalam bekerja dengan skema pembagian tunggal untuk meyakinkan kebenaran hasil hitungan tanpa perlu mengulanginya. Kontrol tersebut didasarkan pada keadaan bahwa bila dalam suatu sistim dilakukan substitusi $\overline{x}_i = x_i + 1$, maka untuk mendapatkan $\overline{x}_i$ akan didapat sebuah sistim dengan koefisien-koefisien sama dengan sistim lama dan bagian konstantanya sama dengan jumlah elemen elemen dari baris dalam matriks koefisien ditambah suku konstantanya. Jadi jumlah tersebut adalah jumlah yang ditulis dalam kolom Σ (Lihat tabel I).

Dalam hal tidak terjadi kesalahan dalam hitungan maka angka pada kolom Σ harus sama dengan jumlah semua elemen pada baris yang bersangkutan. Kemudian dalam langkah balik dicek bahwa nilai $\overline{x}_i$ yang didapat harus sama dengan $x_i + 1$.

Tabel I secara singkat dapat dijelaskan sebagai berikut :

Pertama " Langkah Maju ", dilakukan dengan menuliskan matriks koefisien, suku-suku konstanta dan jumlah kontrol dalam kolom-kolom yang bersangkutan. Baris pertama dibagi dengan elemen awal dan dituliskan hasilnya pada baris terakhir. Kemudian elemen $a_{ij.1}$; $i,j \geq 2$ dihitung dengan cara mengurangi setiap elemen matriks tersebut dengan hasil kali elemen awal baris tersebut dan elemen terbawah dalam kolom yang bersangkutan. Demikian selanjutnya proses diulangi. Langkah maju mencapai hasilnya bila sudah didapat sebuah matriks yang terdiri dari satu baris.

BEL I SKEMA PEMBAGIAN TUNGGAL

x_2	x_3	x_4	x_5	x_6										
a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}	a_{18}	1.00	0.39	0.48	0.57	0.66	0.75	0.20	4.05
a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{26}	a_{27}	a_{28}	0.39	1.00	0.33	0.42	0.51	0.60	0.30	3.55
a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	a_{36}	a_{37}	a_{38}	0.48	0.33	1.00	0.27	0.36	0.45	0.40	3.29
a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	a_{46}	a_{47}	a_{48}	0.57	0.42	0.27	1.00	0.21	0.30	0.50	3.27
a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{55}	a_{56}	a_{57}	a_{58}	0.66	0.51	0.36	0.21	1.00	0.15	0.60	3.49
a_{62}	a_{63}	a_{64}	a_{65}	a_{66}	a_{67}	a_{68}	0.75	0.60	0.45	0.30	0.15	1.00	0.70	3.95
b_{12}	b_{13}	b_{14}	b_{15}	b_{16}	b_{17}	b_{18}	1	0.39	0.48	0.57	0.66	0.75	0.20	4.05
$a_{22.1}$	$a_{23.1}$	$a_{24.1}$	$a_{25.1}$	$a_{26.1}$	$a_{27.1}$	$a_{28.1}$		0.84790	0.14280	0.19770	0.25260	0.30750	0.22200	1.97050
$a_{32.1}$	$a_{33.1}$	$a_{34.1}$	$a_{35.1}$	$a_{36.1}$	$a_{37.1}$	$a_{38.1}$		0.14280	0.76960	-0.00360	0.04320	0.09000	0.30400	1.34600
$a_{42.1}$	$a_{43.1}$	$a_{44.1}$	$a_{45.1}$	$a_{46.1}$	$a_{47.1}$	$a_{48.1}$		0.19770	-0.00360	0.67510	-0.16620	-0.12750	0.38600	0.96150
$a_{52.1}$	$a_{53.1}$	$a_{54.1}$	$a_{55.1}$	$a_{56.1}$	$a_{57.1}$	$a_{58.1}$		0.25260	0.04320	-0.16620	0.56440	-0.34500	0.46800	0.91700
$a_{62.1}$	$a_{63.1}$	$a_{64.1}$	$a_{65.1}$	$a_{66.1}$	$a_{67.1}$	$a_{68.1}$		0.30750	0.09000	-0.12750	-0.34500	0.43750	0.55000	0.91250
1	$b_{23.1}$	$b_{24.1}$	$b_{25.1}$	$b_{26.1}$	$b_{27.1}$	$b_{28.1}$		1	0.16842	0.23316	0.29791	0.36266	0.26182	2.32398(7)
	$a_{33.2}$	$a_{34.2}$	$a_{35.2}$	$a_{36.2}$	$a_{37.2}$	$a_{38.2}$			0.74555	-0.03690	0.00066	0.03821	0.26661	1.01414(3)
	$a_{43.2}$	$a_{44.2}$	$a_{45.2}$	$a_{46.2}$	$a_{47.2}$	$a_{48.2}$			-0.03690	0.62900	-0.22510	-0.19920	0.33424	0.50205(4)
	$a_{53.2}$	$a_{54.2}$	$a_{55.2}$	$a_{56.2}$	$a_{57.2}$	$a_{58.2}$			0.00066	-0.22510	0.48915	-0.43661	0.40196	0.22996
	$a_{63.2}$	$a_{64.2}$	$a_{65.2}$	$a_{66.2}$	$a_{67.2}$	$a_{68.2}$			0.03821	-0.19920	-0.43661	0.32593	0.46949	0.19788(7)
	1	$b_{34.2}$	$b_{35.2}$	$b_{36.2}$	$b_{37.2}$	$b_{38.2}$			1	-0.04949	0.00039	0.05125	0.35760	1.36026(5)
		$a_{44.3}$	$a_{45.3}$	$a_{46.3}$	$a_{47.3}$	$a_{48.3}$				0.62717	-0.22507	-0.19731	0.34744	0.55224(3)
		$a_{54.3}$	$a_{55.3}$	$a_{56.3}$	$a_{57.3}$	$a_{58.3}$				-0.22507	0.48915	-0.43664	0.40162	0.22996
		$a_{64.3}$	$a_{65.3}$	$a_{66.3}$	$a_{67.3}$	$a_{68.3}$				-0.19731	-0.43664	0.32402	0.45583	0.14590
		1	$b_{45.3}$	$b_{46.3}$	$b_{47.3}$	$b_{48.3}$				1	-0.35887	-0.31460	0.55339	0.88053(1)
			$a_{55.4}$	$a_{56.4}$	$a_{57.4}$	$a_{58.4}$					0.40638	-0.50745	0.52630	0.42724(3)
			$a_{65.4}$	$a_{66.4}$	$a_{67.4}$	$a_{68.4}$					-0.50745	0.26195	0.56514	0.31964
			1	$b_{56.4}$	$b_{57.4}$	$b_{58.4}$					1	-1.24259	1.28875	1.04618(6)
				$a_{66.5}$	$a_{67.5}$	$a_{68.5}$						-0.36860	1.21912	0.85052
				1	x_6	$\bar{x}_6$						1	-3.30743	-2.30743
			1		x_5	$\bar{x}_5$					1		-2.32103	-1.32101
		1			x_4	$\bar{x}_4$				1			-1.49892	-0.49889
	1				x_3	$\bar{x}_3$			1				0.45543	1.45545(3)
1					x_2	$\bar{x}_2$		1					2.57449	3.57448
					x_1	$\bar{x}_1$	1						4.17418	5.17414

Kedua " Langkah Balik ", dimulai dengan baris ter - akhir. Dalam baris ini nilai bilangan tak diketahui yang terakhir didapat pada kolom suku konstanta. Pada kolom kontrol didapat nilai kontrolnya. Demikian seterusnya nilai-nilai bilangan tak diketahui didapat secara berurutan dengan cara mengalikan koefisien b pada kolom terakhir berikutnya dengan nilai bilangan tak diketahui yang sudah didapat terdahulu. Jumlah perkalian-perkalian dan pembagian - pembagian yang diperlukan untuk menyelesaikan n persamaan dengan n bilangan tak diketahui pada skema pembagian tunggal adalah $\frac{1}{6}$ ($2n^3 + 3n^2 + 13n - 12$). Dalam hal matriks koefisien simetri $a_{ij} = a_{ji}$ maka jelas bahwa $a_{ij.k} = a_{ji.k}$ karena itu dalam penulisan elemen-elemen dibawah diagonal utama matriks koefisien dapat dihilangkan. Untuk keadaan matriks koefisien yang simetri, skema pembagian tunggal diubah seperti pada tabel II. Dalam hal penulisan koefisien pada tabel II ini elemen awal tidak ditulis. Ternyata elemen awal tersebut dibutuhkan dalam komputasi pada matriks bantu. Walaupun demikian elemen awal dapat ditemukan sebagai elemen paling atas pada kolom yang mengandung elemen diagonal. Kolom kontrol diisi dengan jumlah elemen-elemen setiap baris termasuk elemen-elemen yang tidak ditulis dalam tabel.

Untuk beberapa sistim persamaan dengan matriks koefisien yang sama, maka penyelesaiannya secara bersama-sama. Dalam hal ini dapat ditambahkan kolom-kolom baru yang diisi dengan suku-suku konstanta masing-masing sistim. Jumlah kontrol adalah jumlah elemen-elemen dari baris-baris matriks koefisien ditambah kolom-kolom baru tersebut.

Skema untuk penyelesaian dari beberapa sistim sekaligus ini dapat dilihat pada tabel III

TABEL II. SKEMA PEMBAGIAN TUNGGAL

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6										
a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}	a_{18}	1.00	0.39	0.48	0.57	0.66	0.75	0.20	4.05
	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{26}	a_{27}	a_{28}		1.00	0.33	0.42	0.51	0.60	0.30	3.55
		a_{33}	a_{34}	a_{35}	a_{36}	a_{37}	a_{38}			1.00	0.27	0.36	0.45	0.40	3.29
			a_{44}	a_{45}	a_{46}	a_{47}	a_{48}				1.00	0.21	0.30	0.50	3.27
				a_{55}	a_{56}	a_{57}	a_{58}					1.00	0.15	0.60	3.49
					a_{66}	a_{67}	a_{68}						1.00	0.70	3.95
1	b_{12}	b_{13}	b_{14}	b_{15}	b_{16}	b_{17}	b_{18}	1	0.39	0.48	0.57	0.66	0.75	0.20	4.05
	$a_{22.1}$	$a_{23.1}$	$a_{24.1}$	$a_{25.1}$	$a_{26.1}$	$a_{27.1}$	$a_{28.1}$		0.84790	0.14280	0.19770	0.25260	0.30750	0.22200	1.97050
		$a_{33.1}$	$a_{34.1}$	$a_{35.1}$	$a_{36.1}$	$a_{37.1}$	$a_{38.1}$			0.76960	-0.00360	0.04320	0.09000	0.30400	1.34600
			$a_{44.1}$	$a_{45.1}$	$a_{46.1}$	$a_{47.1}$	$a_{48.1}$				0.67510	-0.16620	-0.12750	0.38600	0.96150
				$a_{55.1}$	$a_{56.1}$	$a_{57.1}$	$a_{58.1}$					0.56440	-0.34500	0.46800	0.81700
					$a_{66.1}$	$a_{67.1}$	$a_{68.1}$						0.43750	0.55000	0.91250
	1	$b_{23.1}$	$b_{24.1}$	$b_{25.1}$	$b_{26.1}$	$b_{27.1}$	$b_{28.1}$		1	0.16842	0.23316	0.29791	0.36266	0.26133	2.32393
		$a_{33.2}$	$a_{34.2}$	$a_{35.2}$	$a_{36.2}$	$a_{37.2}$	$a_{38.2}$			0.74555	-0.03690	0.00066	0.03821	0.26661	1.01414 (3)
			$a_{44.2}$	$a_{45.2}$	$a_{46.2}$	$a_{47.2}$	$a_{48.2}$				0.62900	-0.22510	-0.19920	0.33424	0.50205 (4)
				$a_{55.2}$	$a_{56.2}$	$a_{57.2}$	$a_{58.2}$					0.48915	-0.43661	0.40186	0.22996
					$a_{66.2}$	$a_{67.2}$	$a_{68.2}$						0.32598	0.46949	0.19798 (7)
		1	$b_{34.2}$	$b_{35.2}$	$b_{36.2}$	$b_{37.2}$	$b_{38.2}$			1	-0.04949	0.00089	0.05125	0.35760	1.36026 (5)
			$a_{44.3}$	$a_{45.3}$	$a_{46.3}$	$a_{47.3}$	$a_{48.3}$				0.62717	-0.22507	-0.19731	0.34744	0.55224 (3)
				$a_{55.3}$	$a_{56.3}$	$a_{57.3}$	$a_{58.3}$					0.48915	-0.43664	0.40162	0.22906
					$a_{66.3}$	$a_{67.3}$	$a_{68.3}$						0.32402	0.45563	0.14590
			1	$b_{45.3}$	$b_{46.3}$	$b_{47.3}$	$b_{48.3}$				1	-0.35887	-0.31460	0.55398	0.89053 (1)
				$a_{55.4}$	$a_{56.4}$	$a_{57.4}$	$a_{58.4}$					0.40838	-0.50745	0.52630	0.42724 (3)
					$a_{66.4}$	$a_{67.4}$	$a_{68.4}$						0.26195	0.56514	0.31964
				1	$b_{56.4}$	$b_{57.4}$	$b_{58.4}$					1	-1.24259	1.28875	1.04613 (5)
					$a_{66.5}$	$a_{67.5}$	$a_{68.5}$						-0.36860	1.21912	0.85052
					1	x_6	$\bar{x}_6$						1	-3.30743	-2.30743
				1		x_5	$\bar{x}_5$					1		-2.82103	-1.82101
			1			x_4	$\bar{x}_4$				1			-1.49892	-0.49889
		1				x_3	$\bar{x}_3$			1				0.45543	1.45545
	1					x_2	$\bar{x}_2$		1					2.57449	3.57448
1						x_1	$\bar{x}_1$	1						4.17418	5.17414

TABEL III. SKEMA PEMBAGIAN TUNGGAL BEBERAPA PERSAMAAN

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6				
1.00	0.39	0.48	0.57	0.66	0.75	0.35	0.20	0.15	4.55
0.39	1.00	0.33	0.42	0.57	0.60	0.45	0.30	0.25	4.25
0.48	0.33	1.00	0.27	0.36	0.45	0.55	0.40	0.35	4.19
0.57	0.42	0.27	1.00	0.21	0.30	0.65	0.50	0.45	4.37
0.66	0.51	0.36	0.21	1.00	0.15	0.75	0.60	0.55	4.79
0.75	0.60	0.45	0.30	0.15	1.00	0.85	0.70	0.65	5.45
1	0.39	0.48	0.57	0.66	0.75	0.35	0.20	0.15	4.55
	0.34790	0.14280	0.19770	0.25260	0.30750	0.31350	0.22200	0.19150	2.47550
	0.14280	0.76960	-0.00360	0.04720	0.09000	0.38200	0.30400	0.27800	2.00600
	0.19770	-0.00360	0.67510	-0.16620	-0.12750	0.45050	0.38600	0.36450	1.77650
	0.25260	0.04320	-0.16620	0.56440	-0.34500	0.51900	0.46800	0.45100	1.78700
	0.30750	0.09000	-0.12750	-0.34500	0.43750	0.58750	0.55000	0.53750	2.03750
	1	0.16842	0.23316	0.29791	0.36266	0.36974	0.26182	0.22585	2.91957$^{(6)}$
		0.74555	-0.03690	0.00066	0.03821	0.32920	0.26661	0.24575	1.58909$^{(8)}$
		-0.03690	0.62900	-0.22510	-0.19920	0.37740	0.33424	0.31985	1.19930$^{(29)}$
		0.00066	-0.22510	0.48915	-0.43661	0.42560	0.40186	0.39395	1.04952$^{(1)}$
		0.03821	-0.19920	-0.43661	0.32598	0.47380	0.46949	0.46805	1.13973$^{(2)}$
		1	-0.04949	0.00089	0.05125	0.44155	0.35760	0.32962	2.13143$^{(2)}$
			0.62717	-0.22507	-0.19731	0.39369	0.34744	0.33201	1.27795$^{(3)}$
			-0.22507	0.48915	-0.43664	0.42531	0.40162	0.39373	1.04811$^{(0)}$
			-0.19731	-0.43664	0.32402	0.45693	0.45583	0.45546	1.05829
			1	-0.35887	-0.31460	0.62772	0.55398	0.52958	2.03765$^{(1)}$
				0.40838	-0.50745	0.56659	0.52630	0.51288	1.50672$^{(0)}$
				-0.50745	0.26195	0.58079	0.56514	0.55991	1.46034
				1	-1.24259	1.38741	1.28875	1.25583	3.63950$^{(46)}$
					-0.36860	1.29483	1.21912	1.19721	3.33253$^{(6)}$
					1	-3.48570	-3.30743	-3.24799	-9.04118$^{(2)}$
				1		-2.94389	-2.82103	-2.76005	-7.54499$^{(5)}$
			1			-1.52536	-1.49392	-1.49011	-3.51137$^{(9)}$
		1				0.54732	0.45543	0.42161	2.42758$^{(6)}$
	1					2.77435	2.57449	2.50785	9.85673$^{(69)}$
1						4.43199	4.17418	4.09620	13.69440$^{(37)}$

3.2 MENGHITUNG DETERMINAN

Metoda Gauss dapat juga dipakai untuk menghitung determinan. Misalnya :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

dan misalnya $a_{11} \neq 0$

Dengan mengambil elemen a_{11} dari baris ke 1 didapatkan

$$\Delta = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Selanjutnya setiap baris yang lain dikurangi dengan baris ke 1 dikalikan dengan elemen pertama dari baris yang ber - sangkutan maka akan didapat,

$$\Delta = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & a_{22.1} & \cdots & a_{2n.1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n2.1} & & a_{nn.1} \end{vmatrix}$$

$$\Delta = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22.1} & a_{23.1} & \cdots & a_{2n.1} \\ a_{32.1} & a_{33.1} & \cdots & a_{3n.1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2.1} & a_{n3.1} & & a_{nn.1} \end{vmatrix}$$

Determinan baru ini berorder n-1. Demikian selanjutnya bila $a_{22.1} \neq 0$, maka proses hitungan dapat dilanjutkan de - ngan cara yang sama. Akhirnya didapat harga determinan adalah hasil kali elemen-elemen awal.

$$\Delta = a_{11} \cdot a_{22.1} \cdot a_{33.2} \cdot \ . \ . \ . \ a_{nn.n-1}$$

Jumlah perkalian dan pembagian untuk menghitung determinan order n adalah $\frac{n-1}{3}(n^2 + n + 3)$.

Skema menghitung determinan, dibawah ini

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1.00 & 0.39 & 0.48 & 0.57 & 0.66 & 0.75 \\ 0.39 & 1.00 & 0.33 & 0.42 & 0.51 & 0.60 \\ 0.48 & 0.33 & 1.00 & 0.27 & 0.36 & 0.45 \\ 0.57 & 0.42 & 0.27 & 1.00 & 0.21 & 0.30 \\ 0.66 & 0.51 & 0.36 & 0.21 & 1.00 & 0.15 \\ 0.75 & 0.60 & 0.45 & 0.30 & 0.15 & 1.00 \end{vmatrix}$$

Dapat dilihat pada tabel IV.

Proses menghitung determinan dalam pasal ini ternya ta sama dengan langkah maju dalam metoda Gauss.

Dari cara Cramer diketahui bahwa penyelesaian suatu sistim persamaan linier didapat dalam bentuk,

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \qquad ; i = 1,2, \ . \ . \ . \ n \qquad \Delta \neq 0$$

dengan Δ adalah determinan koefisien dari sistim, dan Δ_i adalah determinan koefisien dengan kolom ke i diganti suku suku konstanta. Sehingga untuk menyelesaikan suatu sistim persamaan linier dibutuhkan menghitung n+1 buah determinan order n. Dibandingkan dengan metoda Gauss, dapat dilihat bahwa untuk menghitung satu determinan prosesnya hanya ber beda sedikit dengan proses penyelesaian suatu sistim persa maan linier dengan order yang sama. Maka bila cara Cramer dipakai untuk penyelesaian numerik suatu sistim persamaan linier, jelas tidak efisien karena banyaknya determinan yang harus dihitung.

TABEL IV. PENGHITUNG DETERMINAN

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6								
a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}	1.00	0.39	0.48	0.57	0.66	0.75	3.95
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{26}	a_{27}	0.39	1.00	0.33	0.42	0.51	0.60	3.25
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	a_{36}	a_{37}	0.48	0.33	1.00	0.27	0.36	0.45	2.89
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	a_{46}	a_{47}	0.57	0.42	0.27	1.00	0.21	0.30	2.77
a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{55}	a_{56}	a_{57}	0.66	0.51	0.36	0.21	1.00	0.15	2.69
a_{61}	a_{62}	a_{63}	a_{64}	a_{65}	a_{66}	a_{67}	0.75	0.60	0.45	0.30	0.15	1.00	3.35
1	b_{12}	b_{13}	b_{14}	b_{15}	b_{16}	b_{17}	1	0.39	0.48	0.57	0.66	0.75	3.95
	$a_{22.1}$	$a_{23.1}$	$a_{24.1}$	$a_{25.1}$	$a_{26.1}$	$a_{27.1}$		0.64790	0.14280	0.19770	0.25260	0.30750	1.74850
	$a_{32.1}$	$a_{33.1}$	$a_{34.1}$	$a_{35.1}$	$a_{36.1}$	$a_{37.1}$		0.14280	0.76960	-0.00360	0.04320	0.09000	1.04200
	$a_{42.1}$	$a_{43.1}$	$a_{44.1}$	$a_{45.1}$	$a_{46.1}$	$a_{47.1}$		0.19770	-0.00360	0.67510	-0.16620	-0.12750	0.57550
	$a_{52.1}$	$a_{53.1}$	$a_{54.1}$	$a_{55.1}$	$a_{56.1}$	$a_{57.1}$		0.25260	0.04320	-0.16620	0.56440	-0.31500	0.34900
	$a_{62.1}$	$a_{63.1}$	$a_{64.1}$	$a_{65.1}$	$a_{66.1}$	$a_{67.1}$		0.30750	0.09000	-0.12750	-0.34500	0.43750	0.36250
	1	$b_{23.1}$	$b_{24.1}$	$b_{25.1}$	$b_{26.1}$	$b_{27.1}$		1	0.16842	0.23316	0.29731	0.36266	2.06315
		$a_{33.2}$	$a_{34.2}$	$a_{35.2}$	$a_{36.2}$	$a_{37.2}$			0.74555	-0.03690	0.00066	0.03621	0.74752
		$a_{43.2}$	$a_{44.2}$	$a_{45.2}$	$a_{46.2}$	$a_{47.2}$			-0.03690	0.62900	-0.22510	-0.19920	0.16781 (0)
		$a_{53.2}$	$a_{54.2}$	$a_{55.2}$	$a_{56.2}$	$a_{57.2}$			0.00066	-0.22510	0.48915	-0.47661	-0.17190
		$a_{63.2}$	$a_{64.2}$	$a_{65.2}$	$a_{66.2}$	$a_{67.2}$			0.03621	-0.19920	-0.43661	0.32598	-0.27161 (2)
		1	$b_{34.2}$	$b_{35.2}$	$b_{36.2}$	$b_{37.2}$			1	-0.04942	0.00069	0.05125	1.00264 (5)
			$a_{44.3}$	$a_{45.3}$	$a_{46.3}$	$a_{47.3}$				0.62717	-0.22507	-0.19731	0.20491 (7)
			$a_{54.3}$	$a_{55.3}$	$a_{56.3}$	$a_{57.3}$				-0.22507	0.48915	-0.43664	-0.17256
			$a_{64.3}$	$a_{65.3}$	$a_{66.3}$	$a_{67.3}$				-0.19731	-0.43664	0.32402	-0.30999 (3)
			1	$b_{45.3}$	$b_{46.3}$	$b_{47.3}$				1	-0.35987	-0.31460	0.32656 (3)
				$a_{55.4}$	$a_{56.4}$	$a_{57.4}$					0.40839	-0.50745	-0.09976 (7)
				$a_{65.4}$	$a_{66.4}$	$a_{67.4}$					-0.50745	0.26195	-0.24549 (50)
				1	$b_{56.4}$	$b_{57.4}$					1	-1.24259	-0.24257 (9)
					$a_{66.5}$	$a_{67.5}$						-0.36860	-0.36858 (60)
							1	0.64790	0.74555	0.62717	0.40839	-0.36860	-0.05965

3.3 SUSUNAN KOMPAK UNTUK PENYELESAIAN SISTIM PERSAMAAN LINIER NON HOMOGEN

Pada pasal 3.1 penyelesaian sistim persamaan linier dengan skema pembagian tunggal yang diperlukan untuk penyelesaian hanyalah koefisien $b_{ij.i-1}$ sedangkan koefisien $a_{ij.k}$ hanya dipakai untuk menghitung nilai $b_{ij.i-1}$. Secara sederhana $b_{ij.i-1}$ dapat ditulis sebagai b_{ij} tanpa indek. Dapat disimpulkan bahwa b_{ij} dapat dihitung dengan proses akumulasi, dimana nilai $a_{ij.k}$ tidak perlu dicatat lagi. Misalnya diambil elemen-elemen kolom pertama pada matriks bantu $a_{ij.j-1}$ dan disebut sebagai c_{ij} maka,

$$\begin{aligned} a_{ij.k} &= a_{ij.k-1} - a_{ik.k-1}\, b_{kj.k-1} \\ &= a_{ij.k-1} - c_{ik}\, b_{kj} \\ &= a_{ij.k-2} - c_{i\ k-1}\, b_{k-1\ j} - c_{ik}\, b_{kj} \qquad \ldots (1) \\ &= a_{ij} - c_{i1}\, b_{1j} - c_{i2}\, b_{2j} - \ldots c_{ik}\, b_{kj} \\ &= a_{ij} - \sum_{l=1}^{k} c_{il}\, b_{lj} \end{aligned}$$

Secara umum untuk elemen c_{ij} ; $i \geq j$ dan b_{ij} ; $i < j$ maka rumus-rumus diatas ditulis sebagai,

$$c_{ij} = a_{ij.j-1} = a_{ij} - \sum_{l=1}^{j-1} c_{il}\, b_{lj} \qquad i \geq j$$

$$\ldots (2)$$

$$b_{ij} = \frac{a_{ij.i-1}}{a_{ii.i-1}} = \frac{a_{ij} - \sum_{l=1}^{i-1} c_{il}\, b_{lj}}{c_{ii}} \qquad i < j$$

Langkah balik sama dengan pada skema pembagian tunggal.

Menghitung dengan skema kompak untuk sistim persamaan pada pasal 3.1 dapat dilihat pada tabel V.

Disini elemen c dan b ditempatkan menyilang dan hitungan dimulai dengan elemen c.

SKEMA KOMPAK UNTUK MASALA PEMBAGIAN TUNGGAL

2	x_3	x_4	x_5	x_6										
12	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}	a_{18}	1.00	0.39	0.48	0.57	0.66	0.75	0.20	4.05
22	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{26}	a_{27}	a_{28}	0.39	1.00	0.33	0.42	0.51	0.60	0.30	3.55
32	a_{33}	a_{34}	a_{35}	a_{36}	a_{37}	a_{38}	0.48	0.33	1.00	0.27	0.36	0.45	0.40	3.29
42	a_{43}	a_{44}	a_{45}	a_{46}	a_{47}	a_{48}	0.57	0.42	0.27	1.00	0.21	0.30	0.50	3.27
52	a_{53}	a_{54}	a_{55}	a_{56}	a_{57}	a_{58}	0.66	0.51	0.36	0.21	1.00	0.15	0.60	3.49
62	a_{63}	a_{64}	a_{65}	a_{66}	a_{67}	a_{68}	0.75	0.60	0.45	0.30	0.15	1.00	0.70	3.95
12	b_{13}	b_{14}	b_{15}	b_{16}	b_{17}	b_{18}	1.00 1	0.39	0.48	0.57	0.66	0.75	0.20	4.05
22 1	b_{23}	b_{24}	b_{25}	b_{26}	b_{27}	b_{28}	0.39	0.84790 1	0.16842	0.23316	0.29791	0.36266	0.26182	2.32398 (7)
32	c_{33} 1	b_{34}	b_{35}	b_{36}	b_{37}	b_{38}	0.48	0.14280	0.74555 1	-0.04949	0.00088	0.05125	0.35760	1.36025 (4)
42	c_{43}	c_{44} 1	b_{45}	b_{46}	b_{47}	b_{48}	0.57	0.19770	-0.03690	0.62718 1	-0.35885	-0.31460	0.55397	0.38053 (2)
52	c_{53}	c_{54}	c_{55} 1	b_{56}	b_{57}	b_{58}	0.66	0.25260	0.00066	-0.22506	0.40838 1	-1.24258	1.28878	1.04620
62	c_{63}	c_{64}	c_{65}	c_{66} 1	b_{67}	b_{68}	0.75	0.30750	0.03821	-0.19731	-0.50745	-0.36860 1	-3.30744	-2.30747 (4)
				1	x_6	$\overline{x}_6$						1	-3.30744	-2.30747
			1		x_5	$\overline{x}_5$					1		-2.82101	-1.82101
		1			x_4	$\overline{x}_4$				1			-1.49890	-0.49890
	1				x_3	$\overline{x}_3$			1				0.45541	1.45542
1					x_2	$\overline{x}_2$		1					2.57449	3.57451
					x_1	$\overline{x}_1$	1						4.17417	5.17420

$$
\begin{array}{cccccc}
c_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{16} \\
c_{21} & c_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} & b_{26} \\
c_{31} & c_{32} & c_{33} & b_{34} & b_{35} & b_{36} \\
c_{41} & c_{42} & c_{43} & & & \\
c_{51} & c_{52} & c_{53} & & & \\
c_{61} & c_{62} & c_{63} & & &
\end{array}
$$

Dalam hal ini suatu elemen dihitung sebagai selisih antara elemen a yang bersangkutan dengan jumlah hasil kali elemen-elemen c dan b. Elemen c ditulis dibaris yang ber - sangkutan pada sebelah kiri dan elemen b pada kolom yang bersangkutan. Untuk menghitung elemen b, nilai-nilai di - atas harus dibagi lagi dengan elemen c.

Jadi $c_{64} = a_{64} - c_{61}\, b_{14} - c_{62}\, b_{24} - c_{63}\, b_{34}$

$= 0.30 - 0.4275 - 0.0717 + 0.00189$

$= -0.19731$

Dan
$$b_{46} = \frac{a_{46} - c_{41}\, b_{16} - c_{42}\, b_{26} - c_{43}\, b_{36}}{c_{44}}$$

$$= \frac{0.30 - 0.4275 - 0.0717 + 0.00189}{0.62717}$$

$= -0.31460$

Mengenai kolom konstanta dan kolom kontrol hitungan pada skema kompak, cara yang dipakai sama dengan pada ske- ma pembagian tunggal. Dengan demikian pada tiap langkah hitungan, nilai pada kolom kontrol harus sama dengan jum - lah elemen-elemen baris-baris yang bersangkutan dari mat - riks B ditambah dengan kolom konstanta yang sudah ditrans- formasi. Matriks B yang didapat disini sama dengan matriks B yang didapat sesudah selesainya langkah maju pada hitung an dengan skema pembagian tunggal.

3.4 HUBUNGAN METODA GAUSS DENGAN PENGURAIAN MATRIKS MENJADI FAKTOR-FAKTOR

Suatu sistim n persamaan linier dengan n bilangan tak diketahui dapat ditulis dalam bentuk matriks.

$$AX = F \qquad \ldots (1)$$

A merupakan sebuah matriks yang sudah diketahui dan non singulir, artinya determinan A tidak sama dengan nol. Sedang X merupakan matriks kolom yang terdiri dari bilangan-bilangan tak diketahui dan F matriks kolom dari bilangan-bilangan konstanta.

Metoda Gauss yang dijelaskan pada pasal 3.1 sebenarnya merupakan penggantian dari sistim yang diketahui dengan suatu sistim segitiga yang ekivalen, dengan cara mengkombinasikan persamaan-persamaan secara linier atau tepatnya mengkombinasikan secara linier baris-baris matriks A dan F.

Dalam pemakaian skema pembagian tunggal, elemen-elemen ditambah dengan suatu jumlah tertentu yang sebanding dengan elemen baris diatasnya. Transformasi seperti ini disebut transformasi elementer. Hasil transformasi adalah ekivalen dengan praperkalian matriks A dengan matriks segitiga berbentuk.

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & & \gamma_{nn} \end{pmatrix} = \Gamma \qquad \ldots (2)$$

Dan hasilnya berupa matriks segitiga.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Jadi $\Gamma A = B$ atau $A = \Gamma^{-1}B$.

Dapat diartikan sebagai A diuraikan menjadi hasil kali dua buah matriks segitiga. Pada hitungan dengan skema kompak dapat dilihat bahwa $\Gamma^{-1} = C$.

Dari elemen-elemen matriks C yang didefinisikan oleh rumus

$$c_{ij} = a_{ij.j-1} = a_{ij} - \sum_{l=1}^{j-1} c_{il}\, b_{lj} \quad ; i \geqslant j$$

didapat $a_{ij} = c_{ij} + \sum_{l=1}^{j-1} c_{il}\, b_{lj}$

$$a_{ij} = \sum_{l=1}^{j} c_{il}\, b_{lj}$$

sedangkan dari elemen-elemen.

$$b_{ij} = \frac{a_{ij.i-1}}{a_{ii.i-1}} = \frac{a_{ij} - \sum_{l=1}^{i-1} c_{il}\, b_{lj}}{c_{ii}} \qquad i < j$$

Didapat $a_{ij} = c_{ii}\, b_{ij} + \sum_{l=1}^{i-1} c_{il}\, b_{lj}$

$$a_{ij} = \sum_{l=1}^{i} c_{il}\, b_{lj}$$

Dari rumus-rumus diatas diperoleh $A = CB$.

Karena elemen-elemen diagonal matriks B sama dengan satu maka penguraian diatas bersifat tunggal.

Cara menghitung dengan metoda Gauss selain dengan skema pembagian tunggal adalah dengan penguraian matriks menjadi perkalian dua matriks segitiga.

Perlu dicatat bahwa cara diatas hanya dapat diterap kan bila determinan-determinan,

$$a_{11}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \ldots |A|$$

tidak ada yang sama dengan nol.

Dapat diperlihatkan bila matriks A simetri maka,

$$b_{ik} = \frac{c_{ki}}{c_{ii}}$$

Dari $A = CB$

$A' = B'C'$ karena $A = A'$

$$CB = B'C' = B' \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & c_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{c_{21}}{c_{11}} & \frac{c_{31}}{c_{11}} & \frac{c_{n1}}{c_{11}} \\ 0 & 1 & \frac{c_{32}}{c_{22}} & \frac{c_{n2}}{c_{22}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Dengan kenyataan tunggalnya uraian matriks A menjadi perkalian dua matriks segitiga maka didapat

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{c_{21}}{c_{11}} & \frac{c_{31}}{c_{11}} & \cdots\cdots & \frac{c_{n1}}{c_{11}} \\ 0 & 1 & \frac{c_{32}}{c_{22}} & \cdots\cdots & \frac{c_{n2}}{c_{22}} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{c_{43}}{c_{33}} \cdots & \frac{c_{n3}}{c_{33}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Jadi elemen-elemen matriks B dapat dihitung secara mudah yaitu elemen-elemen matriks C dibagi c_{11}, c_{22} dan seterusnya.

3.5 METODA AKAR KWADRAT

Bila matriks A simetri, maka penyelesaiannya dapat dikerjakan lebih sederhana. Dalam hal ini matriks tersebut diurai menjadi hasil kali dua matriks segitiga yang satu dan lainnya saling transpose, jadi

$$A = S'S \qquad \ldots (1)$$

dengan

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ 0 & s_{22} & \cdots & s_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & s_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_{nn} \end{pmatrix} \qquad \ldots (2)$$

Elemen-elemen matriks S ditentukan sebagai berikut :

$$a_{ij} = s_{1i}s_{1j} + s_{2i}s_{2j} + \ldots s_{ii}s_{ij} \qquad i < j$$

$$a_{ii} = s_{1i}^2 + s_{2i}^2 + \ldots s_{ii}^2 \qquad i = j$$

Maka didapat rumus-rumus untuk s_{ij}.

$$s_{11} = \sqrt{a_{11}} \qquad s_{1j} = \frac{a_{1j}}{s_{11}}$$

$$s_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{l=1}^{i-1} s_{li}^2} \qquad i > 1 \qquad \ldots (3)$$

$$s_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{l=1}^{i-1} s_{li}\, s_{lj}}{s_{ii}} \qquad j > 1$$

$$s_{ij} = 0 \qquad i > j$$

Selanjutnya penyelesaian direduksi menjadi penyelesaian dua sistim segitiga.

Persamaan AX = F adalah ekivalen dengan dua persama an $S'K = F$ dan $SX = K$.

elemen-elemen matriks K ditentukan dengan rumus-rumus yang bentuknya analog dengan rumus s_{ij}.

$$k_1 = \frac{f_1}{s_{11}} \quad ; \quad k_i = \frac{f_i - \sum_{l=1}^{i-1} s_{li}k_l}{s_{ii}} \qquad i > 1 \; . \; . \; . \; (4)$$

Sedangkan penyelesaian akhir dihitung dengan rumus.

$$x_n = \frac{k_n}{s_{nn}} \quad ; \quad x_i = \frac{k_i - \sum_{l=i+1}^{n} s_{il}x_l}{s_{ii}} \; ; \; i < n \qquad (5)$$

Dalam skema ini cara kontrol juga dilaksanakan dengan cara membentuk elemen kontrol. Persamaan kontrol analog dengan pada skema kompak.

$$\overline{k_i} = \sum_{k=1}^{n} s_{ik} + k_i$$

Dengan metoda akar kwadrat data yang dicatat sebanyak $\frac{n}{2}(1+n)$ elemen matriks S dan 2n komponen vektor K dan $\overline{K}$. Penyelesaian dengan metoda akar kwadrat untuk sistim persamaan dari pasal 3.1 dapat dilihat pada tabel VI.

Komputasi elemen-elemen s_{ij}, $\overline{k_i}$ dan k_i dilakukan baris demi baris secara urut. Elemen-elemen diagonal dihitung sebagai akar kwadrat dari selisih elemen a yang bersangkutan dengan jumlah kwadrat semua elemen s yang sudah dihitung pada kolom yang bersangkutan. Elemen s_{ij} didapat dengan mengurangi elemen a_{ij} dengan jumlah perkalian, baris demi baris dari elemen-elemen s yang diambil dari kolom-kolom i dan j. Nilai selisih ini kemudian dibagi dengan elemen diagonal baris tersebut.

contoh :

$$s_{46} = \frac{a_{46} - s_{14}s_{16} - s_{24}s_{26} - s_{34}s_{36}}{s_{44}}$$

TABEL VI. METODA AKAR KWADRAT

x_1 a_{11}	x_2 a_{12} a_{22}	x_3 a_{13} a_{23} a_{33}	x_4 a_{14} a_{24} a_{34} a_{44}	x_5 a_{15} a_{25} a_{35} a_{45} a_{55}	x_6 a_{16} a_{26} a_{36} a_{46} a_{56} a_{66}	f f_1 f_2 f_3 f_4 f_5 f_6	f_1 f_2 f_3 f_4 f_5 f_6
s_{11}	s_{12} s_{22}	s_{13} s_{23} s_{33}	s_{14} s_{24} s_{34} s_{44}	s_{15} s_{25} s_{35} s_{45} s_{55}	s_{16} s_{26} s_{36} s_{46} s_{56} s_{66}	k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 k_6	k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 k_6
x_1 x_1	x_2 x_2	x_3 x_3	x_4 x_4	x_5 x_5	x_6 x_6		

TABEL VI. LANJUTAN

1.00	0.39 1.00	0.48 0.33 1.00	0.57 0.42 0.27 1.00	0.66 0.51 0.36 0.21 1.00	0.75 0.60 0.45 0.30 0.15 1.00	0.20 0.30 0.40 0.50 0.60 0.70	4.05 3.55 3.29 3.27 3.49 3.95
1.00	0.39 0.92081	0.48 0.15508 0.86345	0.57 0.21470 -0.04273 0.79195	0.66 0.27432 0.00076 -0.28419 0.63905	0.75 0.33395 0.04425 -0.24914 -0.79406 0.60711i	0.20 0.24109 0.30877 0.43870 0.82357 -2.00802i	4.05 2.13996 (5) 1.17452 (0) 0.69731 (2) 0.66856 -1.40089i (91)
4.17421 5.17414	2.57457 3.57454	0.45541 1.45543	-1.49889 -0.49887	-2.82105 -1.82100			

$$= \frac{0.30 - (0.57).(0.75) - (0.2147).(0.33395) - (-0.04273).(0.04425)}{0.79195}$$

$$= -\ 0.24914$$

Langkah balik dilakukan dengan menggunakan rumus-rumus (5) Untuk menghitung s_{ii} bertanda negatif, maka dipakai bilangan imaginer. Operasi hitung dengan adanya bilangan imaginer menjadi bertambah sulit sedikit dibanding bila hanya bilangan riel saja.

Metoda akar kwadrat banyak dipakai untuk penyelesaian sistim-sistim yang simetris. Metoda ini adalah metoda yang paling efisien.

3.6 INVERSI SEBUAH MATRIKS

Penyelesaian sistim persamaan linier non homogen dan inversi sebuah matriks merupakan dua masalah yang saling berkaitan. Inversi matriks A adalah A^{-1}. Bila diketahui.

$$AX = F \qquad \ldots (1)$$

Dengan mengalikan persamaan (1) dengan A^{-1} pada sebelah kiri didapat

$$X = A^{-1}F \qquad \ldots (2)$$

Persoalan menghitung elemen-elemen inversi sebuah matriks dapat direduksi menjadi persoalan penyelesaian n buah sistim dalam bentuk

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,\alpha_{kj} = \delta_{ij} \qquad \begin{matrix} j = 1,2, \ldots n \\ i = 1.2. \ldots n \end{matrix} \qquad \ldots (3)$$

δ_{ij} adalah simbul Kronecker's.

Bentuk (3) adalah mengikuti bentuk perkalian matriks.

$$A\,A^{-1} = I$$

skemanya dapat dilihat pada tabel VII.
Sebagai hasilnya akan didapat matriks invers yang terdiri dari baris-baris yang tersusun secara terbalik. Untuk kontrol hasil hitungan dan untuk memperkirakan seberapa jauh ketelitian hasilnya, dapat diamati dengan melihat hasil perkalian A dengan A^{-1}.

Untuk menghitung elemen-elemen matriks invers dapat juga dipakai teorema tentang penguraian sebuah matriks menjadi hasil kali dua matriks segitiga. Dalam hal ini dibutuhkan $2n^2$ hitungan untuk menghitung n^2 elemen-elemen matriks invers. Misalnya:

$$A = CB \qquad \ldots (4)$$

Elemen-elemen matriks segitiga C dan B dihitung dengan rumus (2) pasal 3.3.

$$c_{ij} = a_{ij} - \sum_{l=1}^{j-1} c_{il} b_{lj} \qquad i \geqslant j$$

$$b_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{l=1}^{i-1} c_{il} b_{lj}}{c_{ii}} \qquad i < j \; ; \; b_{ii} = 1$$

Jika dipakai notasi $A^{-1} = D$

$$\text{maka } D = B^{-1}C^{-1} \qquad \ldots (5)$$

elemen d_{ij} dapat dihitung tanpa menginversikan matriks B dan C. Dengan mengalikan persamaan (5) dengan C pada sebelah kanan didapat

$$DC = B^{-1} \qquad \ldots (6)$$

Matriks B^{-1} adalah matriks segitiga yang elemen diagonalnya sama dengan satu. Kemudian persamaan (5) dikalikan dengan B pada sebelah kiri didapat,

$$BD = C^{-1}$$

C^{-1} adalah matriks segitiga.

Maka didapat $\frac{n(n+1)}{2}$ persamaan dari sistim $DC = B^{-1}$ dan

TABEL VII. INVERSI SEBUAH MATRIKS : SKEMA PEMBAGIAN TUNGGAL

0	0.39	0.49	0.57	0.66	0.75	1	0	0	0	0	0	4.85
9	1.00	0.33	0.42	0.51	0.60	0	1	0	0	0	0	4.25
8	0.33	1.00	0.27	0.36	0.45	0	0	1	0	0	0	3.89
7	0.42	0.27	1.00	0.21	0.30	0	0	0	1	0	0	3.77
6	0.51	0.36	0.21	1.00	0.15	0	0	0	0	1	0	3.89
5	0.60	0.45	0.30	0.15	1.00	0	0	0	0	0	1	4.25
	0.39	0.48	0.57	0.66	0.75	1	0	0	0	0	0	4.85
	0.84790	0.14290	0.19770	0.25260	0.30750	-0.39	1	0	0	0	0	2.35850
	0.14230	0.76960	-0.00560	0.04320	0.09000	-0.48	0	1	0	0	0	1.56200
	0.19770	-0.00360	0.67510	-0.16620	-0.12750	-0.57	0	0	1	0	0	1.00550
	0.25260	0.04320	-0.16620	0.56440	-0.34500	-0.66	0	0	0	1	0	0.68900
	0.30750	0.09000	-0.12750	-0.34500	0.13750	-0.75	0	0	0	0	1	0.61250
	1	0.16842	0.23316	0.29791	0.36266	-0.45996	1.17938	0	0	0	0	2.78158(7)
		0.74555	-0.03690	0.00066	0.03821	-0.41432	-0.16842	1	0	0	0	1.16479(3)
		-0.03690	0.62990	-0.22510	-0.19920	-0.47907	-0.23316	0	1	0	0	0.45558(7)
		0.00066	-0.22510	0.48915	-0.43661	-0.54381	-0.29791	0	0	1	0	-0.01363(2)
		0.03821	-0.19920	-0.43661	0.32598	-0.60856	-0.36266	0	0	0	1	-0.24284
		1	-0.04949	0.00089	0.05125	-0.55572	-0.22590	1.34129	0	0	0	1.56232
			0.62717	-0.22507	-0.19731	-0.49958	-0.24150	0.04949	1	0	0	0.51323(5)
			-0.22507	0.48915	-0.43664	-0.54344	-0.29776	-0.00089	0	1	0	-0.01466(5)
			-0.19731	-0.43664	0.32402	-0.58733	-0.35403	-0.05125	0	0	1	-0.30254
			1	-0.35887	-0.31460	-0.79656	-0.38506	0.07891	1.59446	0	0	0.81833(8)
				0.40838	-0.50745	-0.72272	-0.38443	0.01687	0.35887	1	0	0.16952
				-0.50745	0.26195	-0.74450	-0.43001	-0.03568	0.31460	0	1	-0.14103(9)
				1	-1.24259	-1.76972	-0.94135	0.04131	0.87876	2.14870	0	0.41510(1)
					-0.36860	-1.64254	-0.90770	-0.01472	0.76053	1.24259	1	0.06956
					1	4.45616	2.46256	0.03995	-2.06329	-3.37111	-2.71298	-0.18871(3)
				1		3.76746	2.11860	0.09093	-1.68506	-1.74021	-3.37112	0.18061(2)
			1			1.95738	1.14996	0.12410	0.34963	-1.68506	-2.06330	0.22378(1)
		1				-0.69058	-0.29708	1.34530	0.12410	0.09093	0.03995	1.61260(55)
	1					-3.53847	-0.56293	-0.29708	1.14995	2.11857	2.46253	2.33255(7)
						-4.23257	-3.53853	-0.69058	1.95740	3.76747	4.45620	2.71903(9)

$\frac{n(n-1)}{2}$ persamaan dari sistim $BD = C^{-1}$.

Dari persamaan-persamaan yang didapat diatas dapat dihitung n^2 elemen-elemen matriks invers.

Misalnya untuk n = 6

$$
\begin{array}{rcl}
 & i = & 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6 \\
c_{11}d_{i1}+c_{21}d_{i2}+c_{31}d_{i3}+c_{41}d_{i4}+c_{51}d_{i5}+c_{61}d_{i6} & = & 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\
c_{22}d_{i2}+c_{32}d_{i3}+c_{42}d_{i4}+c_{52}d_{i5}+c_{62}d_{i6} & = & 1\ 0\ 0\ 0\ 0 \\
c_{33}d_{i3}+c_{43}d_{i4}+c_{53}d_{i5}+c_{63}d_{i6} & = & 1\ 0\ 0\ 0 \\
c_{44}d_{i4}+c_{54}d_{i5}+c_{64}d_{i6} & = & 1\ 0\ 0 \\
c_{55}d_{i5}+c_{65}d_{i6} & = & 1\ 0 \\
c_{66}d_{i6} & = & 1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
 & j = & 2\ 3\ 4\ 5\ 6 \\
d_{ij}+b_{12}d_{2j}+b_{13}d_{3j}+b_{14}d_{4j}+b_{15}d_{5j}+b_{16}d_{6j} & = & 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\
d_{2j}+b_{23}d_{3j}+b_{24}d_{4j}+b_{25}d_{5j}+b_{26}d_{6j} & = & 0\ 0\ 0\ 0 \\
d_{3j}+b_{34}d_{4j}+b_{35}d_{5j}+b_{36}d_{6j} & = & 0\ 0\ 0 \\
d_{4j}+b_{45}d_{5j}+b_{46}d_{6j} & = & 0\ 0 \\
d_{5j}+b_{56}d_{6j} & = & 0
\end{array}
$$

Dari persamaan-persamaan pada grup pertama, untuk i=6 ; d_{66}, d_{65}, d_{64}, d_{63}, d_{62}, d_{61} ditentukan secara berurutan. d_{56}, d_{46}, d_{36}, d_{26}, d_{16} ditentukan dari persamaan-persamaan grup kedua untuk j=4. Proses ini dilanjutkan secara analog dengan memakai rumus-rumus grup kesatu dan kedua secara bergantian. Demikian juga d_{51}, d_{52}, d_{53}, d_{54} dan d_{55} dari persamaan-persamaan grup kesatu untuk i=5.

d_{45}, d_{35}, d_{25} dan d_{15} ditentukan dari persamaan-persamaan grup kedua untuk j=5.

d_{41}, d_{42}, d_{43} dan d_{44} dari grup satu untuk i=4

d_{14}, d_{24}, d_{34} dari grup dua untuk j=4.

d_{31}, d_{32}, d_{33} dari grup satu untuk i=3.

d_{13} dan d_{23} dari grup dua untuk j=3.

d_{21} dan d_{22} dari grup satu untuk i=2.

d_{12} dari grup dua untuk j=2 dan akhirnya d_{11} dari grup satu untuk i=1.

Inversi matriks dengan skema kompak ini dapat dilihat pada tabel VIII.

3.7 PERSOALAN ELIMINASI

Persoalan ini dalam kasus yang sederhana adalah menghitung nilai dari suatu bentuk limier

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots c_nx_n \qquad \ldots (1)$$

Dengan c_1, c_2, c_3, . . . c_n adalah bilangan yang diketahui dan x_1, x_2, x_3, . . . x_n adalah penyelesaian dari sistim

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots a_{nn}x_n = b_n \end{array} \qquad \ldots (2)$$

yang determinannya tidak nol.

Prosedur biasa untuk menyelesaikan persoalan ini adalah menentukan nilai-nilai x_1, x_2, x_3, . . . x_n dalam bentuk eksplisit dan mensubstitusikan kedalam bentuk (1). Supaya proses hitungan lebih efisien digunakan cara sebagai berikut :

Tabulasikan matriks koefisien sistim (2), dampingkan kolom konstanta disebelah kanannya dan tambahkan dibawahnya suatu baris terdiri dari koefisien-koefisien bentuk ... dengan tanda dibalik. Letakkan

TABEL VIII SKEMA KOMPAK UNTUK INVERSI MATRIKS

1.00	0.39	0.48	0.57	0.66	0.75						
0.39	1.00	0.33	0.42	0.51	0.60						
0.48	0.33	1.00	0.27	0.36	0.45						
0.57	0.42	0.27	1.00	0.21	0.30						
0.66	0.51	0.36	0.21	1.00	0.15						
0.75	0.60	0.45	0.30	0.15	1.00						
1.00 1	0.39	0.48	0.57	0.66	0.75	-4.23278	-3.53845	-0.69056	1.95727	3.76743	4.45613
0.39	0.84790 1	0.16842	0.23316	0.29791	0.36266	-3.53843	-0.56290	-0.29707	1.14988	2.11655	2.46250
0.48	0.14230	0.74555 1	-0.04949	0.00088	0.05125	-0.69055	-0.29706	1.34531	0.12408	0.09091	0.03990
0.57	0.19770	-0.03690	0.62718 1	-0.35885	-0.31459	1.95725	1.14987	0.12410	0.34072	-1.68492	-2.06319
0.66	0.25260	0.00066	-0.22506	0.40838 1	-1.24258	3.76740	2.11855	0.09091	-1.68499	-1.74018	-3.37108
0.75	0.30750	0.03821	-0.19731	-0.50745	-0.36860 1	4.45615	2.46253	0.03991	-2.06320	-3.37112	-2.71297

elemen nol pada pojok kanan bawah, maka didapat skema

$$\begin{array}{cccc||c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ \hline\hline -c_1 & -c_2 & \cdots & -c_n & 0 \end{array} \qquad \ldots (3)$$

Atau secara singkat.

$$\begin{array}{c||c} A & b \\ \hline\hline -c & 0 \end{array} \qquad \ldots (3')$$

Misalkan $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots \gamma_n$ merupakan penyelesaian sistim persamaan-persamaan,

$$\begin{aligned} a_{11}\gamma_1 + a_{21}\gamma_2 + \ldots a_{n1}\gamma_n &= c_1 \\ a_{12}\gamma_1 + a_{22}\gamma_2 + \ldots a_{n2}\gamma_n &= c_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\ldots \\ a_{1n}\gamma_1 + a_{2n}\gamma_2 + \ldots a_{nn}\gamma_n &= c_n \end{aligned} \qquad \ldots (4)$$

Selanjutnya,

$$\begin{aligned} b_1\gamma_1 + b_2\gamma_2 + \ldots b_n\gamma_n &= \\ &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n)\gamma_1 \\ &+ (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n)\gamma_2 \\ &+ (\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots). \\ &+ (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots a_{nn}x_n)\gamma_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (a_{11}\gamma_1 + a_{21}\gamma_2 + \ldots a_{n1}\gamma_n)x_1 \\ &+ (a_{12}\gamma_1 + a_{22}\gamma_2 + \ldots a_{n2}\gamma_n)x_2 \end{aligned}$$

$$+ (a_{1n}\gamma_1 + a_{2n}\gamma_2 + . . . a_{nn}\gamma_m) x_n$$

$$= c_1x_1 + c_2x_2 + . . . c_nx_n$$

Jadi komputasi bentuk $c_1x_1 + c_2x_2 + . . . c_nx_n$ dapat diganti dengan komputasi bentuk $b_1\gamma_1 + b_2\gamma_2 + . . . b_n\gamma_n$. Jelaslah jika baris pertama skema (3) dikalikan dengan γ_1, baris kedua dengan γ_2, . . . , baris ke n dengan γ_n. Dan menjumlahkan baris ke 1 sampai dengan ke n pada baris terakhir yaitu baris dibawah garis double dalam skema (3) maka akan didapat sebuah baris dengan elemen-elemennya sama dengan nol kecuali elemen pojok kanan bawah yang menunjukkan nilai yang dicari, yaitu nilai dari bentuk linier $c_1x_1 + c_2x_2 + . . . c_nx_n$.

Sebaliknya jika dicari suatu kombinasi linier dari n buah baris-baris sedemikian hingga penambahan hasilnya pada baris terakhir akan menghasilkan sebuah baris dengan elemen-elemen sama dengan nol kecuali elemen pojok kanan bawah, maka koefisien-koefisien dari kombinasi ini adalah nilai-nilai γ atau berarti penyelesaian dari sistim persamaan linier (4) dan elemen pada pojok kanan bawah adalah nilai yang dicari yaitu nilai $c_1x_1 + c_2x_2 + . . . c_nx_n$.

Dengan demikian sebenarnya nilai-nilai $\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_n$ tidaklah perlu dicari. Yang dibutuhkan adalah usaha untuk membuat baris terakhir menjadi nol dengan cara menambah suatu kombinasi linier dari n baris diatasnya. Hal ini dapat dilaksanakan dengan "Langkah Maju", yang biasa dilakukan pada metoda Gauss dan diterapkan pada skema (3).

Cara diatas dapat juga dimanfaatkan untuk menghitung nilai suatu bentuk linier non homogen.

$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + . . . c_nx_n + d$$

Dalam hal ini elemen pada pojok kanan bawah tidak nol melainkan d sehingga skemanya menjadi,

$$\begin{array}{cccc||c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} & b_n \\ \hline\hline -c_1 & -c_2 & & -c_n & d \end{array} \qquad \ldots (3")$$

Penyelesaian sistim (2) juga dapat dicari dengan metoda ini tanpa melakukan " Langkah Balik ".
Nilai-nilai $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ didapat dalam bentuk linier (1) dengan koefisien-koefisien (1,0, . . . 0) (0,1, . . . 0) . . . (0,0, . . . 1)

Dengan skema eliminasi sekaligus dimasukkan baris-baris pada pojok kiri bawah dalam bentuk (-1,0,0 . . . 0) (0,-1,0, . . . 0) . . . (0,0,0, . . . -1) yang akan menyusun matriks -I.
Sedang pada pojok kanan bawah ditempatkan matriks kolom dengan elemen-elemen sama dengan nol

Skema penyelesaian sistim ini adalah.

$$\begin{array}{c||c} A & b \\ \hline\hline -I & 0 \end{array} \qquad \ldots (5)$$

Diusahakan membuat matriks nol pada pojok kiri bawah skema (5) dengan penambahan suatu kombinasi linier dengan n baris diatasnya, maka dipojok kanan bawah akan didapat matriks kolom yang elemen-elemennya adalah nilai-nilai bilangan tak diketahui yang dicari.

Menginversikan matriks dapat juga ekivalen cara diatas. Pandang suatu sistim n persamaan linier istimewa dengan konstanta-konstantanya berbentuk matriks satuan. Penyelesaiannya dilakukan dengan skema.

$$\begin{array}{c||c} A & I \\ \hline\hline -I & 0 \end{array} \qquad \ldots (6)$$

Dengan I adalah matriks satuan dan dipojok kanan bawah ditampatkan matriks nol order n. Sesudah menolkan semua baris-baris pada pojok kiri bawah dengan penambahan kombinasi-kombinasi linier dari n baris diatasnya maka pada pojok kanan bawah akan didapat matriks A^{-1}.

Penyelesaian sistim $x_1, x_2, \ldots x_n$ ditulis dalam bentuk matriks kolom

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1}b$$

Dan selanjutnya bentuk linier $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots c_nx_n$ dapat ditulis sebagai $CA^{-1}b$.

Dalam hal lain dapat juga dilakukan komputasi pada bentuk yang lebih rumit $CA^{-1}B$ dengan C dan B matriks segi empat yang diketahui. C terdiri dari n kolom dan B terdiri dari n baris sedangkan jumlah baris C dan jumlah kolom B sebarang. Dengan demikian baris ke i dan kolom ke k matriks $CA^{-1}B$ adalah nilai $c_i\ A^{-1}\ b_k$ dimana c_i adalah baris ke i matriks C dan b_k adalah kolom ke k matriks B. Komputasi elemen-elemen matriks $CA^{-1}B$ dilakukan dengan metoda eliminasi dan memakai skema,

$$\begin{array}{c||c} A & B \\ \hline\hline -C & 0 \end{array} \qquad \ldots (7)$$

Setelah menolkan elemen-elemen matriks pada pojok kiri bawah dengan kombinasi linier n baris-baris diatasnya, maka akan didapat matriks $CA^{-1}B$ pada pojok kanan bawah.

Dengan mengambil $C = I$ didapat skema,

$$\begin{array}{c||c} A & B \\ \hline\hline -I & 0 \end{array} \qquad \ldots (8)$$

Yang dapat dipakai untuk menghitung perkalian $A^{-1}B$.
Jika $D = CA^{-1}B$ maka $D' = B' (A')^{-1} C'$ dapat dihitung dengan memakai skema,

$$\begin{array}{c||c} A' & C' \\ \hline\hline -B' & 0 \end{array} \qquad \ldots (9)$$

Dengan demikian komputasi nilai dari bentuk linier $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots c_nx_n$ juga dapat dilakukan dengan skema

$$\begin{array}{c||c} A' & C' \\ \hline\hline -b' & 0 \end{array} \qquad \ldots (10)$$

Dengan A' transpose dari matriks koefisien sistim, C' adalah matriks kolom terdiri dari koefisien-koefisien bentuk linier yang akan dihitung, b' adalah matriks baris dari konstanta dengan tanda dibalik.

Kebenaran skema diatas dapat dibuktikan secara langsung. Bila n baris skema (10) dikalikan dengan $x_1, x_2, \ldots x_n$ dan dijumlahkan pada baris akhir, akan didapat nilai nol pada pojok kiri bawah dan $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots c_nx_n$ pada pojok kanan bawah.

Secara analog, penyelesaian sistim persamaan $AX = B$ dapat juga memakai skema

$$\begin{array}{c||c} A' & I \\ \hline\hline -b' & 0 \end{array} \qquad \ldots (11)$$

Pada tabel IX dapat dilihat penyelesaian sistim dengan metoda eliminasi. Sebagaimana biasanya, kolom terakhir tabel IX merupakan kontrol. Selama proses hitungan, nilai-nilai yang didapat harus sesuai dengan jumlah bilangan-bilangan terdahulu pada baris yang sama.

Pada penyelesaian sistim dengan metoda eliminasi, jumlah operasi ternyata lebih banyak dari pada metoda Gauss. Keseragaman dalam proses operasi dan tidak diperlukannya langkah balik menyebabkan metoda ini juga sering dipakai dalam terapan.

Untuk inversi matriks skema.

$$\begin{array}{c||c} A' & I \\ \hline\hline -I & 0 \end{array}$$

dapat juga dipakai. Disini setelah selesainya proses, akan didapatkan pada pojok kanan bawah suatu transpose dari A^{-1}. Jadi tiap persoalan yang dianalisa ada dua skema yang didefinisikan dengan matriks A dan A transpose. Dapat dicatat bahwa skema yang paling efisien dipakai adalah skema yang mempunyai jumlah baris paling sedikit pada pojok kiri bawah.

Untuk penyelesaian suatu sistim linier tanpa menggunakan langkah balik paling efisien dengan menggunakan skema transpose matriks. Komputasi perkalian $A^{-1}B$, skema dengan matriks transpose menjadi efisien bila jumlah kolom B kurang dari n dan dipakai skema dengan matriks biasa bila jumlah kolom B lebih besar dari n.

Pada tabel X dapat dilihat komputasi perkalian $A^{-1}B$ sebagai A dipakai matriks,

TABEL IX. PENYELESAIAN SISTIM PERSAMAAN LINIER DENGAN METODA ELIMINASI

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6							
.00	0.39	0.48	0.57	0.66	0.75	1	0	0	0	0	0	4.85
.39	1.00	0.33	0.42	0.51	0.60	0	1	0	0	0	0	4.25
.48	0.33	1.00	0.27	0.36	0.45	0	0	1	0	0	0	3.89
.57	0.42	0.27	1.00	0.21	0.30	0	0	0	1	0	0	3.77
.66	0.51	0.36	0.21	1.00	0.15	0	0	0	0	1	0	3.89
.75	0.60	0.45	0.30	0.15	1.00	0	0	0	0	0	1	4.25
.20	-0.30	-0.40	-0.50	-0.60	-0.70	0	0	0	0	0	0	-2.70
.00	0.39	0.48	0.57	0.66	0.75	1	0	0	0	0	0	4.85
	0.84790	0.14280	0.19770	0.25260	0.30750	-0.39	1	0	0	0	0	2.35850
	0.14280	0.76960	-0.00360	0.04320	0.09000	-0.48	0	1	0	0	0	1.56200
	0.19770	-0.00360	0.67510	-0.16620	-0.12750	-0.57	0	0	1	0	0	1.00550
	0.25260	0.04320	-0.16620	0.56440	-0.34500	-0.66	0	0	0	1	0	0.68900
	0.30750	0.09000	-0.12750	-0.34500	0.43750	-0.75	0	0	0	0	1	0.61250
	-0.22200	-0.30400	-0.38600	-0.46800	-0.55000	0.20	0	0	0	0	0	-1.73000
	1	0.16842	0.23316	0.29791	0.36266	-0.45996	1.17938	0	0	0	0	2.78158 (7)
		0.74555	-0.03690	0.00066	0.03821	-0.41432	-0.16842	1	0	0	0	1.16479 (8)
		-0.03690	0.62900	-0.22510	-0.19920	-0.47907	-0.23316	0	1	0	0	0.45558 (7)
		0.00066	-0.22510	0.48915	-0.43661	-0.54381	-0.29791	0	0	1	0	-0.01363 (2)
		0.03821	-0.19920	-0.43661	0.32598	-0.60856	-0.36266	0	0	0	1	-0.24284
		-0.26661	-0.33424	-0.40186	-0.46949	0.09789	0.26182	0	0	0	0	-1.11249
		1	-0.04949	0.00089	0.05125	-0.55572	-0.22590	1.34129	0	0	0	1.56232
			0.62717	-0.22507	-0.19731	-0.49958	-0.24150	0.04949	1	0	0	0.51323 (0)
			-0.22507	0.48915	-0.43664	-0.54344	-0.29776	-0.00089	0	1	0	-0.01466 (5)
			-0.19731	-0.43664	0.32402	-0.58733	-0.35403	-0.05125	0	0	1	-0.30254
			-0.34743	-0.40162	-0.45583	-0.05027	0.20159	0.35760	0	0	0	-0.69596
			1	-0.35887	-0.31460	-0.79656	-0.39506	0.07891	1.59446	0	0	0.81835 (26)
				0.40838	-0.50745	-0.72272	-0.38443	0.01687	0.35887	1	0	0.16952
				-0.50745	0.26195	-0.74450	-0.43001	-0.03568	0.31460	0	1	-0.14108 (9)
				-0.52630	-0.56513	-0.32702	0.06781	0.38502	0.55396	0	0	-0.41165 (6)
				1	-1.24259	-1.76972	-0.94135	0.04131	0.27876	2.44670	0	0.41510 (1)
					-0.36860	-1.64254	-0.90770	-0.01472	0.76053	1.24259	1	0.06956
					-1.21912	-1.25842	-0.42762	0.40676	1.01645	1.28875	0	-0.19518 (20)
					1	4.45616	2.46256	0.03993	-2.06329	-3.37111	-2.71297	-0.18871 (2)
						4.17417	2.57454	0.45544	-1.49895	-2.82104	-3.30744	-0.42324 (8)

TABEL X MENGHITUNG $A^{-1}B$

1.00	0.39	0.48	0.57	0.66	0.75	1	0	0	0	0	0	4.95
0.39	1.00	0.33	0.42	0.51	0.60	0	1	0	0	0	0	4.25
0.48	0.33	1.00	0.27	0.36	0.45	0	0	1	0	0	0	3.89
0.57	0.42	0.27	1.00	0.21	0.30	0	0	0	1	0	0	3.77
0.66	0.51	0.36	0.21	1.00	0.15	0	0	0	0	1	0	3.89
0.75	0.60	0.45	0.30	0.15	1.00	0	0	0	0	0	1	4.25
-0.35	-0.45	-0.55	-0.65	-0.75	-0.85	0	0	0	0	0	0	-3.6
-0.20	-0.30	-0.40	-0.50	-0.60	-0.70	0	0	0	0	0	0	-2.7
-0.15	-0.25	-0.35	-0.45	-0.55	-0.65	0	0	0	0	0	0	-2.4
1.00	0.39	0.48	0.57	0.66	0.75	1	0	0	0	0	0	4.85
	0.84790	0.14280	0.19770	0.25260	0.30750	-0.39	1	0	0	0	0	2.35650
	0.14280	0.76960	-0.00360	0.04320	0.09000	-0.48	0	1	0	0	0	1.56200
	0.19770	-0.00360	0.67510	-0.16620	-0.12750	-0.57	0	0	1	0	0	1.00550
	0.25260	0.04320	-0.16620	0.56440	-0.34500	-0.66	0	0	0	1	0	0.68900
	0.30750	0.09000	-0.12750	-0.34500	0.43750	-0.75	0	0	0	0	1	0.61250
	-0.31350	-0.38200	-0.45050	-0.51900	-0.58750	0.35	0	0	0	0	0	-1.90250
	-0.22200	-0.30400	-0.38600	-0.46800	-0.55000	0.20	0	0	0	0	0	-1.73000
	-0.19150	-0.27800	-0.36450	-0.45100	-0.53750	0.15	0	0	0	0	0	-1.67250
	1	0.16842	0.23316	0.29791	0.36266	-0.45996	1.17938	0	0	0	0	2.78158 (7)
		0.74555	-0.03690	0.00066	0.03821	-0.41432	-0.16842	1	0	0	0	1.16479 (8)
		-0.03690	0.62900	-0.22510	-0.19920	-0.47907	-0.23316	0	1	0	0	0.45558 (7)
		0.00066	-0.22510	0.48915	-0.43661	-0.54381	-0.29791	0	0	1	0	-0.01363 (2)
		0.03821	-0.19920	-0.43661	0.32598	-0.60856	-0.36266	0	0	0	1	-0.24284
		-0.32920	-0.37740	-0.42561	-0.47381	0.20580	0.36974	0	0	0	0	-1.03047 (8)
		-0.26661	-0.33424	-0.40186	-0.46949	0.05789	0.26182	0	0	0	0	-1.11249
		-0.24575	-0.31985	-0.39395	-0.46805	0.06192	0.22585	0	0	0	0	-1.13983
		1	-0.04949	0.00089	0.05125	-0.55572	-0.22590	1.34129	0	0	0	1.56232
			0.62717	-0.22507	-0.19731	-0.49950	-0.24150	0.04949	1	0	0	0.51323 (0)
			-0.22507	0.48915	-0.43664	-0.54344	-0.29776	-0.00089	0	1	0	-0.01466 (5)
			-0.19731	-0.43664	0.32402	-0.58733	-0.35403	-0.05125	0	0	1	-0.30254
			-0.39369	-0.42532	-0.45694	0.02286	0.29537	0.44155	0	0	0	-0.51615 (7)
			-0.34743	-0.40162	-0.45583	-0.05027	0.20159	0.35760	0	0	0	-0.69596
			-0.33201	-0.39373	-0.45546	-0.07465	0.17034	0.32962	0	0	0	-0.75589
			1	-0.35887	-0.31460	-0.79656	-0.38506	0.07891	1.59446	0	0	0.81833 (28)
				0.40838	-0.50745	-0.72272	-0.38443	0.01687	0.35887	1	0	0.16952
				-0.50745	0.26195	-0.74450	-0.43001	-0.03568	0.31460	0	1	-0.14108 (9)
				-0.56660	-0.58079	-0.29074	0.14378	0.47262	0.62772	0	0	-0.19398 (401)
				-0.52630	-0.56513	-0.32702	0.06781	0.38502	0.55396	0	0	-0.41165 (6)
				-0.51288	-0.55991	-0.33912	0.04250	0.35582	0.52938	0	0	-0.48420 (1)
				1	-1.24259	-1.76972	-0.94135	0.04131	0.87876	2.44870	0	0.41510 (1)
					-0.36860	-1.64254	-0.90770	-0.01472	0.76053	1.24259	1	0.06956
					-1.28484	-1.29346	-0.38959	0.49603	1.12563	1.38743	0	0.04122 (0)
					-1.21911	-1.25842	-0.42762	0.40676	1.01645	1.28875	0	-0.19318 (9)
					-1.19721	-1.24677	-0.44030	0.37701	0.98001	1.25589	0	0.27130 (7)
					1	4.45616	2.46256	0.03993	-2.06329	-3.37111	-2.71297	-0.18871 (2)
						4.43199	2.77441	0.54733	-1.52537	-2.94391	-3.48573	-0.20124 (8)
						4.17413	2.57451	0.45544	-1.49893	-2.82100	-3.30741	-0.42324 (6)
						4.08819	2.50790	0.42481	-1.49018	-2.78004	-3.24799	0.49723 (31)

$$\begin{pmatrix} 1.00 & 0.39 & 0.48 & 0.57 & 0.66 & 0.75 \\ 0.39 & 1.00 & 0.33 & 0.42 & 0.51 & 0.60 \\ 0.48 & 0.33 & 1.00 & 0.27 & 0.36 & 0.45 \\ 0.57 & 0.42 & 0.27 & 1.00 & 0.21 & 0.30 \\ 0.66 & 0.51 & 0.36 & 0.21 & 1.00 & 0.15 \\ 0.75 & 0.60 & 0.45 & 0.30 & 0.15 & 1.00 \end{pmatrix}$$

dan matriks B

$$\begin{pmatrix} 0.35 & 0.20 & 0.15 \\ 0.45 & 0.30 & 0.25 \\ 0.55 & 0.40 & 0.35 \\ 0.65 & 0.50 & 0.45 \\ 0.75 & 0.60 & 0.55 \\ 0.85 & 0.70 & 0.65 \end{pmatrix}$$

Komputasi dilakukan dengan skema (9) dengan $C' = I$ sebagai hasilnya didapat.

$$A^{-1} B = \begin{pmatrix} 4.43199 & 4.17413 & 4.08819 \\ 2.77441 & 2.57451 & 2.50790 \\ 0.54733 & 0.45544 & 0.42481 \\ -1.52537 & -1.49893 & -1.49018 \\ -2.94391 & -2.82100 & -2.78004 \\ -3.48573 & -3.30741 & -3.24799 \end{pmatrix}$$

3.8 INVERSI MATRIKS DENGAN " PARTITIONING "

Kadang-kadang bermanfaat untuk melakukan partitioning sebuah matriks sebelum melakukan inversi.

Akan ditinjau rumus untuk inversi matriks order n yang dipartitioning menjadi empat sel dengan skema,

$$S = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$$

Dengan A dan D matriks bujur sangkar order p dan q ; p + q = n. Selanjutnya dicari inversi yang juga dalam bentuk

$$S^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} K & L \\ \hline M & N \end{array}\right)$$

K dan N juga matriks bujur sangkar dengan order p dan q , sesuai dengan aturan perkalian matriks yang sudah dipartisi berlaku persamaan-persamaan matriks berikut ini.

$$A\ K + B\ M = I$$
$$A\ L + B\ N = 0$$
$$C\ K + D\ M = 0$$
$$C\ L + D\ N = I$$

Kalikan persamaan ketiga disebelah kiri dengan $B\ D^{-1}$ dan hasilnya dikurangkan pada persamaan pertama didapat,

$$A\ K + B\ M = I$$
$$B\ D^{-1}\ C\ K + B\ D^{-1}\ D\ M = 0$$
$$(\ A - B\ D^{-1}\ C\ )\ K = I$$
$$K = (\ A - B\ D^{-1}\ C\ )^{-1}$$

Dari persamaan ketiga didapat,

$$M = -\ D^{-1}\ C\ K$$

Sedangkan dengan mengalikan persamaan kedua disebelah kiri dengan $C\ A^{-1}$ dan mengkurangkannya pada persamaan keempat didapat

$$C\ L + D\ N = I$$
$$C\ A^{-1}\ A\ L + C\ A^{-1}\ B\ N = 0$$

$$(D - C A^{-1} B) N = I$$
$$N = (D - C A^{-1} B)^{-1}$$

dan dari persamaan kedua didapat,

$$L = - A^{-1} B N$$

Dalam hal penurunan rumus-rumus diatas, dianggap bahwa semua matriks-matriks ada inversnya.

Inversi matriks order n dengan demikian tereduksi menjadi inversi empat buah matriks dua diantaranya dengan order p, dua dengan order q dan beberapa pekerjaan perkalian matriks.

Rumus-rumus diatas dapat diubah sehingga komputasi matriks K, L, M dan N hanya membutuhkan dua matriks order p dan q yang perlu diinvers.

$$N = (D - C A^{-1} B)^{-1}$$
$$L = - A^{-1} B N$$

Dari persamaan satu.

$$A^{-1} A K + A^{-1} B M = A^{-1} I$$
$$K + A^{-1} B M = A^{-1}$$
$$K = A^{-1} - A^{-1} B M$$

Dari persamaan satu dan tiga.

$$C K + D M = 0$$
$$C A^{-1} A K + C A^{-1} B M = C A^{-1} I$$
$$(D - C A^{-1} B) M = - C A^{-1}$$
$$M = - (D - C A^{-1} B)^{-1} C A^{-1} = - N C A^{-1}$$

Atau $K = (A - B D^{-1} C)^{-1}$

$$M = - D^{-1} C K$$

Dari persamaan empat

$$D^{-1} C L + D^{-1} D N = D^{-1} I$$

$$D^{-1} C L + N = D^{-1}$$

$$N = D^{-1} - D^{-1} C L$$

Dari persamaan dua dan empat,

$$A L + B N = 0$$

$$B D^{-1} C L + B D^{-1} D N = B D^{-1} I$$

$$(A - B D^{-1} C) L = - B D^{-1}$$

$$L = - (A - B D^{-1} C)^{-1} B D^{-1}$$

$$L = - K B D^{-1}$$

rumus-rumus terakhir tersebut menunjukkan bahwa metoda partitioning tepat dipakai jika diagonal sel mudah diinversi. Misalnya contoh dibawah ini mengenai inversi matriks.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1.00 & 0.39 & 0.48 & 0.57 & 0.66 & 0.75 \\ 0.39 & 1.00 & 0.33 & 0.42 & 0.51 & 0.60 \\ 0.48 & 0.33 & 1.00 & 0.27 & 0.36 & 0.45 \\ \hline 0.57 & 0.42 & 0.27 & 1.00 & 0.21 & 0.30 \\ 0.66 & 0.51 & 0.36 & 0.21 & 1.00 & 0.15 \\ 0.75 & 0.60 & 0.45 & 0.30 & 0.15 & 1.00 \end{array}\right)$$

Komputasi akan berjalan sebagai berikut :

1. Dihitung matriks A^{-1}

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1.40963 & -0.36637 & -0.55572 \\ -0.36637 & 1.21743 & -0.22590 \\ -0.55572 & -0.22590 & 1.34129 \end{pmatrix}$$

Dan dihitung hasil perkalian

TABEL MENCARI A^{-1}

1.00	0.39	0.48	1	0	0	2.87
0.39	1.00	0.33	0	0	0	2.72
0.48	0.33	1.00	0	0	1	2.81
-1	0	0	0	0	0	-1
0	-1	0	0	0	0	-1
0	0	-1	0	0	0	-1
1.00	0.39	0.48	1	0	0	2.87
	0.84790	0.14280	-0.39000	1	0	1.60070
	0.14280	0.76960	-0.48000	0	1	1.43240
	0.39000	0.48000	1	0	0	1 87000
	-1	0	0	0	0	-1
	0	-1	0	0	0	-1
	1	0.16842	-0.45996	1.17938	0	1.88784
		0.74555	-0.41432	-0.16842	1	1.16282 (1)
		0.41432	1.17938	-0.45996	0	1.13374
		0.16842	-0.45996	1.17938	0	0.88784
		-1	0	0	0	-1
		1	-0.55572	-0.22590	1.34129	1.55968 (7)
			1.40963	-0.36637	-0.55572	0.48753 (4)
			-0.36637	1.21743	-0.22590	0.62516
			-0.55572	-0.22590	1.34129	0.55968 (7)

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0.49957 & 0.54345 & 0.58733 \\ 0.24150 & 0.29776 & 0.35403 \\ -0.04949 & 0.00088 & 0.05125 \end{pmatrix}$$

$$C\,A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.49957 & 0.24150 & -0.04949 \\ 0.54345 & 0.29776 & 0.00088 \\ 0.58733 & 0.35403 & 0.05125 \end{pmatrix}$$

$$C\,A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0.37282 & 0.43506 & 0.49731 \\ 0.43506 & 0.51085 & 0.58664 \\ 0.49731 & 0.58664 & 0.67598 \end{pmatrix}$$

Dengan dua kali hitungan $C\,(A^{-1}B)$ dan $(C\,A^{-1})\,B$ didapat cek hitungan dari hasil terdahulu.

2. Dihitung matriks,

$$(D - C\,A^{-1}B) = \begin{pmatrix} 0.62718 & -0.22506 & -0.19731 \\ -0.22506 & 0.48915 & -0.43664 \\ -0.19731 & -0.43664 & 0.32402 \end{pmatrix}$$

Dan didapatkan invers

$$N = (D - C\,A^{-1}B)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.34062 & -1.68513 & -2.06335 \\ -1.68512 & -1.74038 & -3.37133 \\ -2.06335 & -3.37134 & -2.71326 \end{pmatrix}$$

Dihitung matriks-matriks :

$$M = -N\,C\,A^{-1} = \begin{pmatrix} 1.95749 & 1.14999 & 0.12409 \\ 3.76773 & 2.11872 & 0.09092 \\ 4.45652 & 2.46272 & 0.03991 \end{pmatrix}$$

TABEL MENCARI $N=(D - CA^{-1}B)^{-1}$

0.62718	-0.22506	-0.19731	1	0	0	1.20481
-0.22506	0.48915	-0.43664	0	1	0	0.82745
-0.19731	-0.43664	0.32402	0	0	1	0.69007
-1	0	0	0	0	0	-1
0	-1	0	0	0	0	-1
0	0	-1	0	0	0	-1
1	-0.35884	-0.31460	1.59444	0	0	1.92100
	0.40839	-0.50744	0.35884	1	0	1.25979
	-0.50744	0.26195	0.31460	0	1	1.06910$^{(11)}$
	-0.35884	-0.31460	1.59444	0	0	0.92100
	-1	0	0	0	0	-1
	0	-1	0	0	0	-1
	1	-1.24254	0.87867	2.44864	0	3.08477
		-0.36856	0.76047	1.24254	1	2.63444$^{(5)}$
		-0.76047	1.90974	0.87867	0	2.02794
		-1.24254	0.87867	2.44864	0	2.08477
		-1	0	0	0	-1
		1	-2.06335	-3.37134	-2.71326	-7.14793$^{(5)}$
			0.34062	-1.68513	-2.06335	-3.40785$^{(6)}$
			-1.68512	-1.74038	-3.37133	-6.79682$^{(3)}$
			-2.06335	-3.37134	-2.71326	-8.14793$^{(5)}$

$$L = -A^{-1}BN = \begin{pmatrix} 1.95748 & 3.76774 & 4.45652 \\ 1.14999 & 2.11873 & 2.46272 \\ 0.12409 & 0.09092 & 0.03991 \end{pmatrix}$$

$$\text{Dan } K = A^{-1} - A^{-1}BM = \begin{pmatrix} -4.23329 & -3.53872 & -0.69056 \\ -3.53872 & -0.56304 & -0.29707 \\ -0.69056 & -0.29707 & 1.34531 \end{pmatrix}$$

Maka matriks yang dicari adalah S^{-1} =

$$\begin{pmatrix} -4.23329 & -3.53872 & -0.69056 & 1.95748 & 3.76774 & 4.45652 \\ -3.53872 & -0.56304 & -0.29707 & 1.14999 & 2.11873 & 2.46272 \\ -0.69056 & -0.29707 & 1.34531 & 0.12409 & 0.09092 & 0.03991 \\ 1.95749 & 1.14999 & 0.12409 & 0.34062 & -1.68513 & -2.06335 \\ 3.76773 & 2.11872 & 0.09092 & -1.68512 & -1.74038 & -3.37133 \\ 4.45652 & 2.46272 & 0.03991 & -2.06335 & -3.37134 & -2.71326 \end{pmatrix}$$

3.9 METODA BORDERING

Pada bab ini akan dibahas skema-skema komputasi inversi matriks dan penyelesaian sistim persamaan linier dengan cara bordering.

Matriks A yang diketahui akan dianggap sebagai hasil dari " Bordering " sebuah matriks order n-1 yang invers matriksnya akan dicari.

Jadi,

$$A_n = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\,n-1} & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{n-1\,1} & a_{n-1\,2} & \cdots & a_{n-1\,n-1} & a_{n-1\,n} \\ \hline a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n\,n-1} & a_{nn} \end{array}\right) \qquad (1)$$

$$= \begin{pmatrix} A_{n-1} & u_n \\ v_n & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A_{n-1} adalah matriks yang berorder n-1.

$v_n = (a_{n1}, a_{n2}, \ldots a_{n\ n-1})$

$$u_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdot \\ a_{n-1\ n} \end{pmatrix} \qquad \ldots (2)$$

Akan dicari A^{-1} yang dinyatakan sebagai matriks bordering juga dalam bentuk,

$$D_n = A_n^{-1} = \begin{pmatrix} P_{n-1} & r_n \\ q_n & \frac{1}{\alpha_n} \end{pmatrix} \qquad \ldots (3)$$

dimana P_{n-1} adalah sebuah matriks, q_n matriks baris, r_n matriks kolom dan $\frac{1}{\alpha_n}$ sebuah bilangan yang mana semuanya akan dicari.

Dengan aturan perkalian matriks didapat,

$$A\ A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{n-1} & u_n \\ v_n & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{n-1} & r_n \\ q_n & \frac{1}{\alpha_n} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{n-1}\ P_{n-1} + u_n\ q_n & A_{n-1}\ r_n + \frac{u_n}{\alpha_n} \\ v_n\ P_{n-1} + a_{nn}\ q_n & v_n\ r_n + \frac{a_{nn}}{\alpha_n} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} I & 0 \\ \ldots \end{pmatrix}$$

Jadi, $A_{n-1} P_{n-1} + u_n q_n = I$ ... (4)

$$v_n P_{n-1} + a_{nn} q_n = 0 \quad \text{... (5)}$$

$$A_{n-1} r_n + \frac{u_n}{\alpha_n} = 0 \quad \text{... (6)}$$

$$v_n r_n + \frac{a_{nn}}{\alpha_n} = 1 \quad \text{... (7)}$$

Maka didapat dari persamaan (6)

$$r_n = - \frac{A_{n-1}^{-1} u_n}{\alpha_n} \quad \text{... (8)}$$

Substitusi nilai ini ke persamaan (7) didapat

$$\alpha_n = a_{nn} - v_n A_{n-1}^{-1} u_n \quad \text{... (9)}$$

Selanjutnya dari persamaan (4)

$$P_{n-1} = A_{n-1}^{-1} - A_{n-1}^{-1} u_n q_n \quad \text{...(10)}$$

Berdasarkan (5) dan (10)

$$v_n A_{n-1}^{-1} - v_n A_{n-1}^{-1} u_n q_n + a_{nn} q_n = 0$$

$$v_n A_{n-1}^{-1} + (a_{nn} - v_n A_{n-1}^{-1} u_n) q_n = 0$$

$$v_n A_{n-1}^{-1} + \alpha_n q_n = 0 \quad \text{...(11)}$$

$$q_n = - \frac{v_n A_{n-1}^{-1}}{\alpha_n}$$

Selanjutnya

$$P_{n-1} = A_{n-1}^{-1} + \frac{A_{n-1}^{-1} u_n v_n A_{n-1}^{-1}}{\alpha_n} \quad \text{... (12)}$$

Dan akhirnya. (13)

$$A_n^{-1} = \begin{pmatrix} A_{n-1}^{-1} + \dfrac{A_{n-1}^{-1}\, u_n\, v_n\, A_{n-1}^{-1}}{\alpha_n} & -\dfrac{A_{n-1}^{-1}\, u_n}{\alpha_n} \\ -\dfrac{v_n\, A_{n-1}^{-1}}{\alpha_n} & \dfrac{1}{\alpha_n} \end{pmatrix}$$

dimana $\alpha_n = a_{nn} - v_n A_{n-1}^{-1} u_n$

Rumus yang disusun ini jelas merupakan suatu bentuk rumus inversi matriks dengan metoda partitioning, p disini sama dengan n-1 dan q sama dengan 1.

Jika A_{n-1}^{-1} telah diketahui, operasi-operasi berikut ini dilakukan untuk menghitung A_n^{-1}.

1. Menghitung kolom $- A_{n-1}^{-1} u_n$, elemen-elemen kolom ini adalah $\beta_{1n}, \beta_{2n}, \ldots \beta_{n-1\ n}$.
2. Menghitung baris $-v_n A_{n-1}^{-1}$ elemen-elemen baris ini adalah $\gamma_{n1}, \gamma_{n2}, \ldots \gamma_{n\ n-1}$.
3. Menghitung nilai-nilai

   $$\alpha_n = a_{nn} + \sum_{i=1}^{n-1} a_{ni}\, \beta_{in} = a_{nn} + \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_{ni}\, a_{in}$$

   Dengan menghitung harga α_n dua kali merupakan cek yang baik atas hitungan yang mendahului.
4. Akhirnya, hitungan elemen-elemen d_{ik} dari matriks invers adalah,

   $$d_{ik} = d_{ik}' + \frac{\beta_{in}\, \gamma_{nk}}{\alpha_n} \qquad (i,k \leq n-1)$$

   $$\ldots (14)$$

   $$d_{in} = \frac{\beta_{in}}{\alpha_n} \qquad d_{nk} = \frac{\gamma_{nk}}{\alpha_n} \quad (i,k \leq n-1)$$

$$d_{nn} = \frac{1}{\alpha_n}$$

Disini d_{ik}' adalah elemen-elemen dari matriks A_{n-1}^{-1}.

Pada tabel XI dilakukan inversi matriks dengan metoda bordering berurutan.

Setiap langkah dilakukan dengan skema sebagai berikut.

$$\begin{array}{c||c||c} A_{n-1}^{-1} & u_n & -A_{n-1}^{-1}\,u_n \\ \hline v_n & a_{nn} & \\ \hline -v_n\,A_{n-1}^{-1} & & \alpha_n \end{array} \qquad \ldots (15)$$

Metoda bordering juga merupakan terapan yang berguna untuk menyelesaikan sistim persamaan linier.

Penyelesaian sistim persamaan linier dalam bentuk,

$$A_n\,X_n = F_n \qquad \ldots (16)$$

Misalnya dipakai simbul-simbul,

$$A_n = \begin{pmatrix} A_{n-1} & u_n \\ v_n & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad F_n = \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix}$$

$$X_n = \begin{pmatrix} Y \\ x_n \end{pmatrix}$$

Maka,

$$X_n = \begin{pmatrix} Y \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{n-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{1}{\alpha_n} \begin{pmatrix} A_{n-1}^{-1}u_n v_n A_{n-1}^{-1} & -A_{n-1}^{-1}u_n \\ -v_n A_{n-1}^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix}$$

TABEL XI INVERSI MATRIKS DENGAN BORDERING

1.00	0.39	0.48	0.57	0.66	0.75	
0.39	1.00	0.33	0.42	0.51	0.60	
0.48	0.33	1.00	0.27	0.36	0.45	
0.57	0.42	0.27	1.00	0.21	0.30	
0.66	0.51	0.36	0.21	1.00	0.15	
0.75	0.60	0.45	0.30	0.15	1.00	
1.00	0.39	-0.39				
0.39	1.00					
-0.39		0.84790				
1.17938	-0.45996	0.48	-0.41432			
-0.45996	1.17938	0.33	-0.16841			
0.48	0.33	1.00				
-0.41432	-0.16841		0.74555			
1.40963	-0.36637	-0.55572	0.57	-0.49957		
-0.36637	1.21742	-0.22589	0.42	-0.24150		
-0.55572	-0.22589	1.34129	0.27	0.04949		
0.57	0.42	0.27	1.00			
-0.49957	-0.24150	0.04949		0.62718		
1.80755	-0.17401	-0.59514	-0.79653	0.66	-0.72272	
-0.17401	1.31041	-0.24495	-0.38506	0.51	-0.38442	
-0.59514	-0.24495	1.34520	0.07891	0.36	0.01687	
-0.79653	-0.38506	0.07891	1.59444	0.21	0.35885	
0.66	0.51	0.36	0.21	1.00		
-0.72272	-0.38442	0.01687	0.35885		0.40838	
3.08657	0.50631	-0.62500	-1.43160	-1.76972	0.75	-1.64253
0.50631	1.67228	-0.26083	-0.72286	-0.94133	0.60	-0.90767
-0.62500	-0.26083	1.34590	0.09373	0.04131	0.45	-0.01472
-1.43160	-0.72286	0.09373	1.90977	0.87872	0.30	0.76050
-1.76972	-0.94133	0.04131	0.87872	2.44870	0.15	1.24258
0.75	0.60	0.45	0.30	0.15	1.00	
-1.64253	-0.90767	-0.01472	0.76050	1.24258		-0.36859
-4.23296	-3.53850	-0.69060	1.95738	3.76753	4.45625	
-3.53850	-0.56290	-0.29708	1.14991	2.11858	2.46255	
-0.69060	-0.29708	1.34531	0.12410	0.09093	0.03994	
1.95738	1.14991	0.12410	0.34065	-1.68506	-2.06327	
3.76753	2.11858	0.09093	-1.68506	-1.74025	-3.37117	
4.45625	2.46255	0.03994	-2.06327	-3.37117	-2.71304	

A_{n-1}^{-1}	u_n	$-A_{n-1}^{-1}\, u_n = \beta_{in}$
v_n	a_{nn}	
$-v_n\, A_{n-1}^{-1} = \gamma_{ni}$		$\alpha_n = a_{nn} - v_n\, A_{n-1}^{-1}\, u_n$

RUMUS - RUMUS

$$\alpha_n = a_{nn} + \sum_{i=1}^{n-1} a_{ni}\, \beta_{in} = a_{nn} + \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_{ni}\, a_{in}$$

$$A_{n-1}^{-1} = D_{n-1} = \left(d_{ik}' \right)$$

$$A_n^{-1} = D_n = \left(d_{ik} \right)$$

$$d_{ik} = d_{ik}' + \frac{\beta_{in}\, \gamma_{nk}}{\alpha_n} \qquad (i,k \leqslant n-1)$$

$$d_{in} = \frac{\beta_{in}}{\alpha_n} \qquad d_{nk} = \frac{\gamma_{nk}}{\alpha_n} \qquad (i,k \leqslant n-1)$$

$$d_{nn} = \frac{1}{\alpha_n}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{n-1}^{-1} F_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\alpha_n} \begin{pmatrix} A_{n-1}^{-1} u_n v_n A_{n-1}^{-1} F_{n-1} - A_{n-1}^{-1} u_n f_n \\ -v_n A_{n-1}^{-1} F_{n-1} + f_n \end{pmatrix}$$

$A_{n-1}^{-1} F_{n-1}$ adalah penyelesaian sistim persamaan.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1\ n-1}x_{n-1} = f_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2\ n-1}x_{n-1} = f_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n-1\ 1}x_1 + a_{n-1\ 2}x_2 + \ldots a_{n-1\ n-1}x_{n-1} = f_{n-1}$$

dimana penyelesaiannya diberi notasi X_{n-1}.

Secara analog $-A_{n-1}^{-1}u_n$ adalah penyelesaian sistim yang sama dengan konstanta diubah.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1\ n-1}x_{n-1} + a_{1n} = 0$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2\ n-1}x_{n-1} + a_{2n} = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n-1\ 1}x_1 + a_{n-1\ 2}x_2 + \ldots a_{n-1\ n-1}x_{n-1} + a_{n-1\ n} = 0$$

Dimana penyelesaiannya disebut Q_{n-1} .

Dengan mengetahui X_{n-1} dan Q_{n-1}, X_n dapat dihitung

$$X_n = \begin{pmatrix} X_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{a_{nn}+v_n Q_{n-1}} \begin{pmatrix} -Q_{n-1}v_n X_{n-1} + Q_{n-1}f_n \\ -v_n X_{n-1} + f_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} X_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{f_n - v_n X_{n-1}}{a_{nn} + v_n Q_{n-1}} \begin{pmatrix} Q_{n-1} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Jadi untuk menentukan X_n , X_{n-1} dan Q_{n-1} dihitung lebih dahulu.

3.10 METODA ESKALATOR

Pada inversi matriks dengan metoda bordering, aturan pokok dari inversi matriks A_{k-1} menjadi inversi matriks bordering A_k ditentukan oleh komputasi $-A_{k-1}^{-1}u_k$ dan $-v_k A_{k-1}^{-1}$. Jelas bahwa komponen-komponen $-A_{k-1}^{-1}u_k$ tidak lain adalah penyelesaian sistim persamaan.

$$a_{11}z_{1k} + a_{12}z_{2k} + \cdots a_{1\,k-1}z_{k-1\,k} + a_{1k} = 0$$
$$a_{21}z_{1k} + a_{22}z_{2k} + \cdots a_{2\,k-1}z_{k-1\,k} + a_{2k} = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \ldots (0)$$
$$a_{k-1\,1}z_{1k} + a_{k-1\,2}z_{2k} + \cdots a_{k-1\,k-1}z_{k-1\,k} + a_{k-1\,k} = 0$$

$-A_{k-1}^{-1}u_k$ pada pasal 3.9 adalah suatu matriks kolom dengan k-1 elemen disebut Z_k dimana $Z_k = (z_{1k}, z_{2k}, \ldots z_{k-1\,k})$ jadi,

$$-A_{k-1}^{-1}u_k = Z_k$$
$$u_k = -A_{k-1}Z_k$$
$$A_{k-1}Z_k + u_k = 0$$
$$u_k = (a_{1k}, a_{2k}, \ldots a_{k-1\,k})$$

Secara analog, komponen-komponen $-v_k A_{k-1}^{-1}$ memberikan penyelesaian dari sistim yang sudah ditranspose.

Penyelesaian berurutan dari sistim yang sama untuk $k = 2,3, \ldots n,n+1$ memberikan dasar bagi metoda Eskalator untuk penyelesaian sistim persamaan-persamaan linier. Dengan demikian metoda Eskalator erat hubungannya dengan metoda Bordering.

Metoda Eskalator memberikan hasil yang cukup dapat diandalkan, walaupun determinan sistim koefisiennya kecil nilainya. Dalam pembahasan ini akan tampak adanya hubungan antara metoda Eskalator dan metoda Gauss.

Pada sistim persamaan yang matriks koefisiennya simetrik.

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n + a_{1\,n+1} = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n + a_{2\,n+1} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots a_{nn}x_n + a_{n\,n+1} = 0 \end{array} \qquad \ldots (1)$$

Misalnya $z_{1k}, \ldots z_{k-1\,k}$ penyelesaian dari sistim

$$\begin{array}{l} a_{11}z_{1k} + a_{12}z_{2k} + \cdots a_{1\,k-1}z_{k-1\,k} + a_{1k} = 0 \\ a_{21}z_{1k} + a_{22}z_{2k} + \cdots a_{2\,k-1}z_{k-1\,k} + a_{2k} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k-1\,1}z_{1k} + a_{k-1\,2}z_{2k} + \cdots a_{k-1\,k-1}z_{k-1\,k} + a_{k-1\,k} = 0 \end{array} \qquad \ldots (2)$$

Bilangan-bilangan $z_{i\,n+1} = x_i$ jelas merupakan penyelesaian sistim (1).

Jika dilakukan hitungan bilangan z_{ik} untuk $i < k \leqslant n+1$ maka akan didapat metoda untuk mencari penyelesaian yang dimaksud. Pertama kali dimisalkan bahwa bilangan-bilangan z_{ik} sudah dihitung untuk $i < k \leqslant n$.

Dengan hasil-hasil tersebut disusun matriks,

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & z_{12} & z_{13} & \cdots & z_{1n} \\ 0 & 1 & z_{23} & \cdots & z_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & z_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & z_{n-1\,n} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \qquad \ldots (3)$$

Dapat dilihat bahwa matriks AZ akan mempunyai elemen-elemen nol diatas diagonal utamanya.

$$C_1 = AZ = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11}z_{12}+a_{12} & \cdots & a_{11}z_{1n}+a_{12}z_{2n}+ & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21}z_{12}+a_{22} & \cdots & a_{21}z_{1n}+a_{22}z_{2n}+ & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n1}z_{12}+a_{n2} & \cdots & a_{n1}z_{1n}+a_{n2}z_{2n}+ & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \ldots (4)$$

Dan dalam hubungannya dengan definisi z_{ij} , semua elemen diatas diagonal utama sama dengan nol. Elemen-elemen matriks C yang tidak sama dengan nol dihitung dengan rumus,

$$c_{ij} = a_{i1}z_{1j} + a_{i2}z_{2j} + \ldots a_{i\,j-1}z_{j-1\,j} + a_{ij} \qquad i \geqslant j \quad \ldots (5)$$

Jadi mengikuti hubungan antara metoda ini dengan Gauss, maka jika metoda Gauss dipandang sebagai penguraian matriks menjadi faktor-faktor maka dari (4)

$$A = C_1\ Z^{-1} \qquad \ldots (6)$$

Karena matriks Z^{-1} adalah matriks segitiga dengan elemen diagonal sama dengan satu dan semua elemen dibawahnya sama dengan nol. C_1 adalah matriks segitiga dengan elemen- elemen nol diatas diagonal utama.

Membandingkan penguraian ini dengan pembagian matriks menurut skema pembagian tunggal Gauss (A = C B) didapat,

$$Z^{-1} = B \text{ dan } C_1 = C \qquad \ldots (7)$$

misalnya matriks C disajikan dalam bentuk.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \gamma_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \gamma_{n3} & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & & & \\ & c_{22} & & \\ & & c_{33} & \\ & & \cdots & \\ & & & c_{nn} \end{pmatrix}$$

Disini $\gamma_{ij} = \dfrac{c_{ij}}{c_{jj}}$ $\quad i > j$

Akan diperlihatkan bahwa matriks $\Gamma = C\,\Lambda^{-1}$ adalah matriks transpose dari matriks Z^{-1}. Dalam hal ini akan dipakai matriks simetri A dan didapat.

$$A = \Gamma \Lambda Z^{-1} = A' = (Z^{-1})' \Lambda \Gamma'$$

$(Z^{-1})'$ adalah matriks segitiga dengan nol diatas diagonal. Γ' adalah matriks segitiga dengan nol dibawah diagonal dan satu pada elemen diagonalnya. Dengan demikian dengan tunggalnya faktorisasi $\Gamma' = Z^{-1}$. Keadaan ini memungkinkan didapatkannya rumus-rumus untuk menghitung secara berurutan nilai-nilai Z_{ij}. Elemen-elemen dari k kolom pertama matriks Z dihitung terdahulu, maka dengan rumus (5) k kolom pertama matriks C dapat dihitung demikian juga k kolom pertama matriks Γ yaitu merupakan k baris pertama matriks Z^{-1}. Dalam rangka melanjutkan proses hitungan, haruslah dihitung elemen-elemen dari kolom ke k+1 dari matriks Z. Karena diagonal elemen dari kolom ini sama dengan satu dan elemen-elemen dibawah diagonal sama dengan nol maka didapat rumus-rumus untuk menghitung $Z_{i\ k+1}$ dimana $i \leq k$. Dari persamaan $Z\,\Gamma' = I$, berdasarkan aturan perkalian matriks didapat rumus-rumus sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
\gamma_{k+1\ 1} + \gamma_{k+1\ 2} z_{12} + \cdots + \gamma_{k+1\ k} z_{1k} + z_{1\ k+1} &= 0 \\
\gamma_{k+1\ 2} + \cdots + \gamma_{k+1\ k} z_{2k} + z_{2\ k+1} &= 0 \\
\cdots\cdots\cdots & \qquad (9) \\
\gamma_{k+1\ k} + z_{k\ k+1} &= 0
\end{aligned}$$

Untuk penghitungan elemen-elemen kolom ke k+1 matriks Z.

Pengecekkan yang dapat diandalkan adalah reduksi ke nol elemen-elemen subdiagonal matriks C'.

Skema terdiri dari tiga bagian. Bagian kesatu diisi matriks koefisien dari sistim persamaan linier (Dalam hal ini matriks koefisien simetri). Bagian kedua secara berangsur-angsur ditabulasikan elemen-elemen kolom-kolom matriks Z. Bagian bawah diisi dengan elemen-elemen diagonal dan subdiagonal matriks C' dan elemen-elemen matriks Γ'. Elemen-elemen baris ke k matriks Γ' didapat dengan mengalikan baris-baris matriks A dengan kolom ke k matriks Z dan mambagi jumlahnya dengan elemen c_{kk}. Sebuah kolom matriks Z diisi penuh dengan rumus (9). Tabel XII merupakan gambaran contoh yang diberikan.

XII. METODA ESCALATOR SKEMA KOMPAK

	0.39	0.48	0.57	0.66	0.75	-0.20	1	-0.39	-0.41432	-0.49957	-0.72272	-1.64250	4.17432
	1.00	0.33	0.42	0.51	0.60	-0.30	0	1	-0.16842	-0.24150	-0.38442	-0.90766	2.57457
	0.33	1.00	0.27	0.36	0.45	-0.40	0	0	1	0.04949	0.01686	-0.01471	0.45542
	0.42	0.27	1.00	0.21	0.30	-0.50	0	0	0	1	0.35885	0.76048	-1.49894
	0.51	0.36	0.21	1.00	0.15	-0.60	0	0	0	0	1	1.24254	-2.82109
	0.60	0.45	0.30	0.15	1.00	-0.70	0	0	0	0	0	1	-3.30760
	-0.30	-0.40	-0.50	-0.60	-0.70		0	0	0	0	0	0	1
)4)02)3)2 11	0.39 1.00 0.84790 -0.000005 -0.000001 0.00007 0.000008 -0.00003	0.48 0.16842 1.00 0.74555 0.000001 0.000005 0.000006 -0.00002	0.57 0.23316 -0.04949 1.00 0.62718 0.000001 -0.0000005 -0.000004	0.66 0.29791 0.00088 -0.35885 1.00 0.40839 -0.000011 0.00003	0.75 0.36266 0.05125 -0.31459 -1.24254 -1.00 -0.36857 -0.00002	-0.20 -0.26182 -0.35760 -0.55396 -1.28874 3.30760 1							